HƏNDƏSƏ DÜSTURLARI

Tayyip Oral
İlyas Həsənov
Şahlar Məhərrəmov

"Çağ" Öyrətim

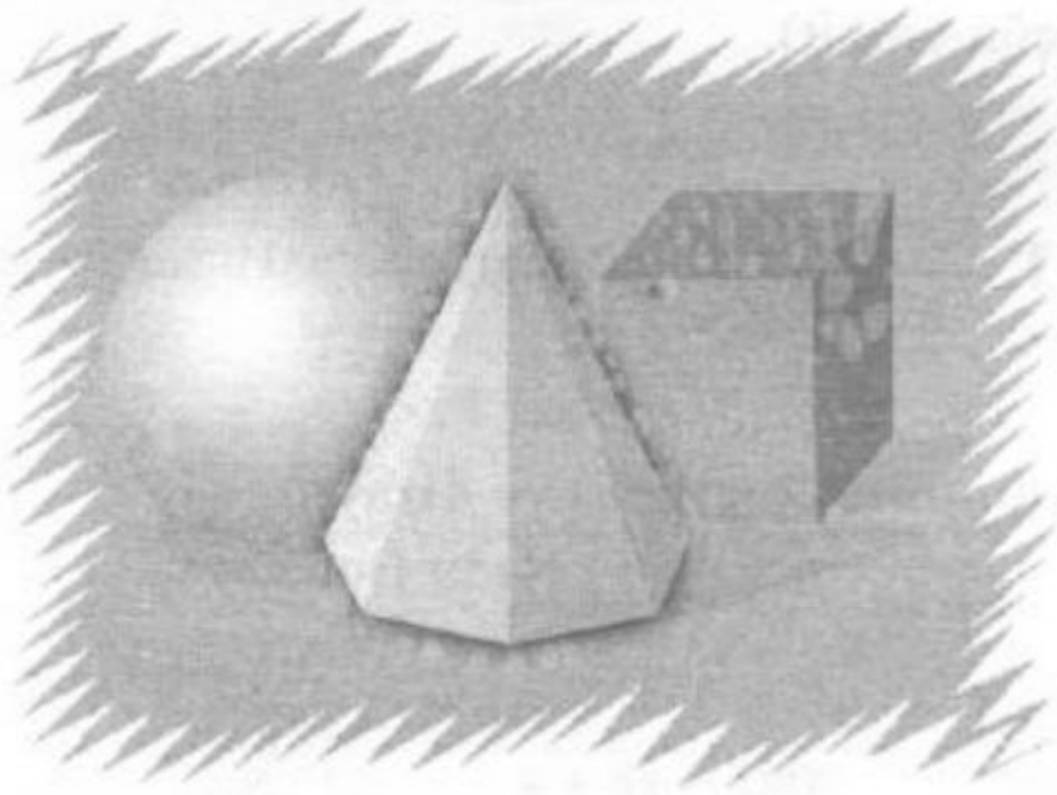
2003

CamScanner ilə skan edilib

HƏNDƏSƏ DÜSTURLARI

Tayyip Oral
İlyas Həsənov
Şahlar Məhərrəmov

"Çəğ" Öyrətim



CamScanner ilə skan edilib

BBK (08)
T (33)

Müəlliflər:
Tayyip Oral,
İlyas Həsənov,
Şahlar Məhərrəmov

İxtisas redaktoru:
Taleh Mustafayev,
Rəşad Əliməmmədov

Üçüncü nəşr

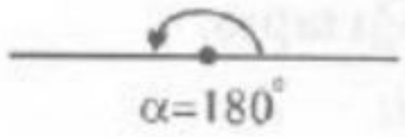
T (33) Tayyip Oral və b. Həndəsə düsturları. (Ali təhsilə hazırlıq kurslarının dinləyiciləri üçün vəsait).

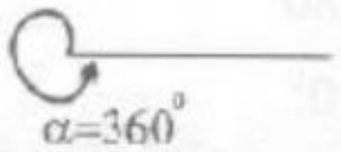
T $\frac{06081237008}{M\text{-}085\text{-}00}$ **e'lansız**

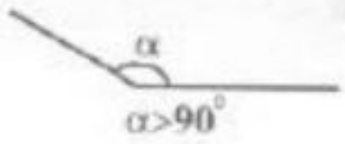
Kompüter tərtibatı və dizayn:
Nadir Budaqov,
Paşa Vasiqov

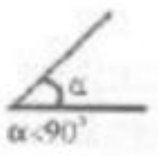
© Araz kursları, 2003

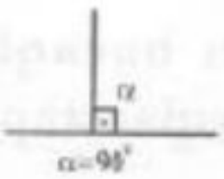
Bucağın növləri

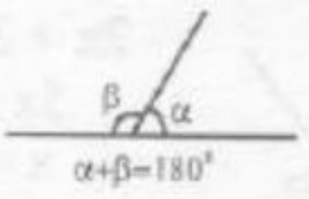
1. Açıq bucaq 

2. Tam bucaq 

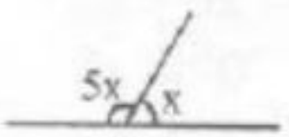
3. Kor bucaq 

4. İti bucaq 

5. Düz bucaq 

6. Qonşu bucaqlar 

Məsələ 1.
Qonşu bucaqlardan biri o birindən 5 dəfə böyükdür. Kiçik bucağı tapın.
Həlli:



$x + 5x = 180^0$

$x = 30^0$

CamScanner ilə skan edilib

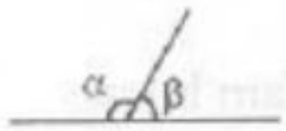
Məsələ 2.

Qunşu bucaqların fərqi 40°-dir. kiçik bucağı tapın.

Həlli:

$\alpha + \beta = 180^0$

$\alpha - \beta = 40^0$

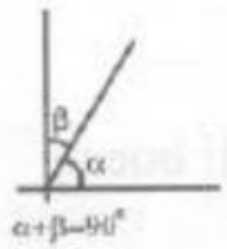


$2\alpha = 220^0$

$\alpha = 110^0$

$\beta = 70^0$

7. Tamamlayıcı bucaqlar



Məsələ 1.

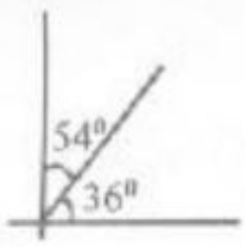
Tamamlayıcı bucaqların nisbəti 2:3 kimidir. Bucaqları tapın.

Həlli:

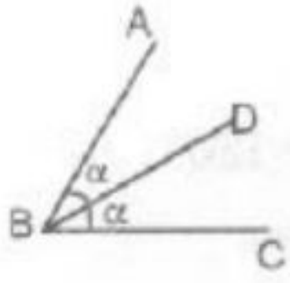
$2x + 3x = 90^0$

$5x = 90^0$

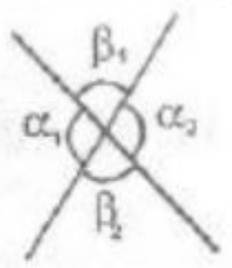
$x = 18^0$



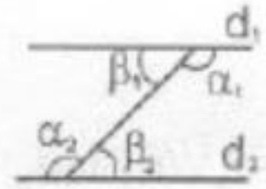
8. [BD] tənböləndir. $\angle ABD = \angle DBC = \alpha$



9. $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ və ya
$\alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 = 180^0$

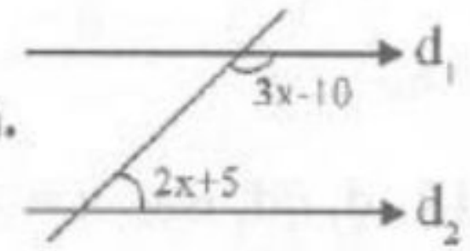


10. $d_1 // d_2$ isə, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$



Məsələ 1.

Şəklə əsasən x -i tapın.



Həlli:

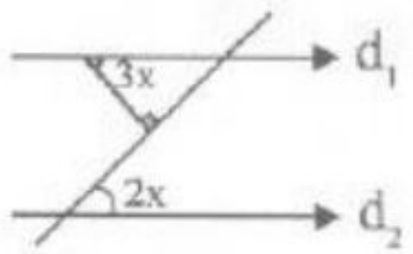
$3x - 10 + 2x + 5 = 180^0$

$5x = 185^0$

$x = 37^0$

Məsələ 2.

Şəklə əsasən x = ?



Həlli:

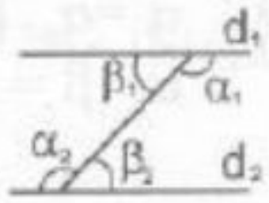
$2x + 3x = 90$

$5x = 90^0$

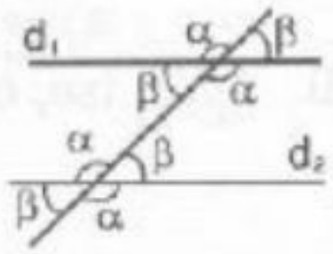
$x = 18^0$

CamScanner ilə skan edilib

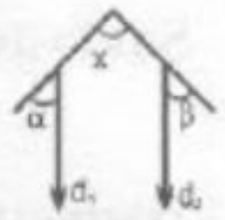
11. $d_1 // d_2$ isə , $\alpha_1 + \beta_1 = 180^0$



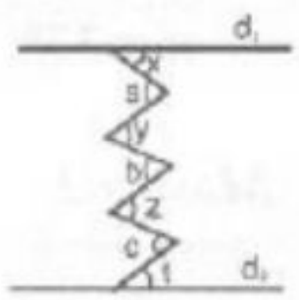
12. $d_1 // d_2$ isə , $\alpha + \beta = 180^0$



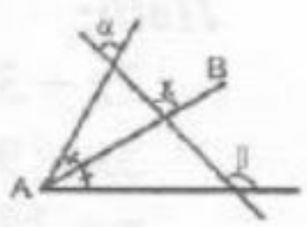
13. $d_1 // d_2$ isə, $x = \alpha + \beta$



14. $d_1 // d_2$, $a+b+c = x+y+z+t$

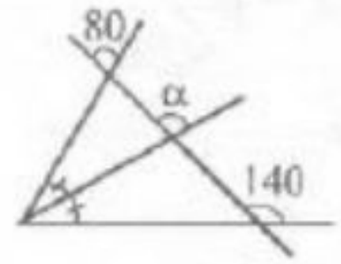


15. [AB] tənböləndir. $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$



Məsələ 1.

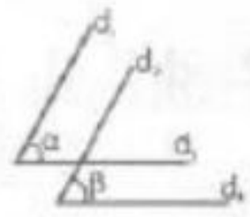
Şəklə əsasən $\alpha = ?$



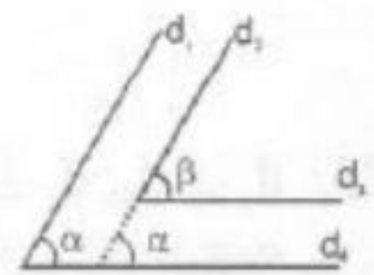
Həlli:

$$\alpha = \frac{80+140}{2} = \frac{220}{2} = 110 \Rightarrow \alpha = 110^0$$

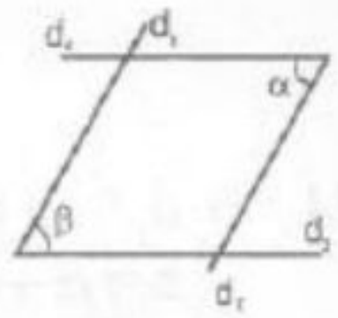
16. $d_1 // d_2$, $d_3 // d_4$ olarsa, $\alpha = \beta$



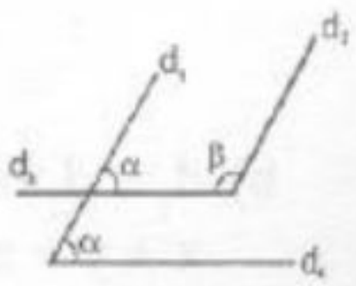
17. $d_1 // d_2$, $d_3 // d_4$ olarsa, $\alpha = \beta$



18. $d_1 // d_2$, $d_3 // d_4$ olarsa, $\alpha = \beta$

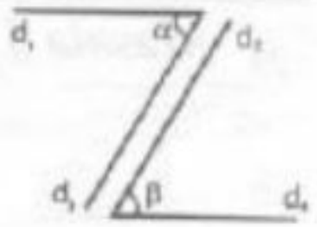


19. $d_1 // d_2$, $d_3 // d_4$ olarsa, $\alpha + \beta = 180^0$

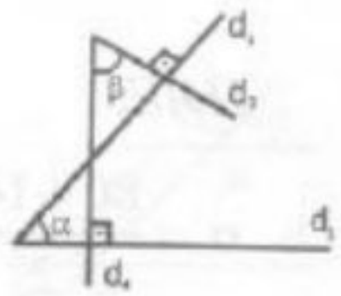


CamScanner ilə skan edilib

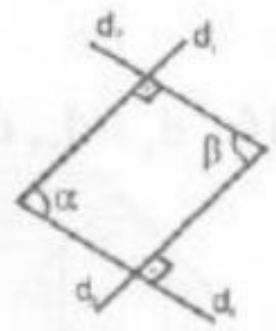
20. $d_1 // d_4$, $d_2 // d_3$ olarsa,
$\alpha = \beta$



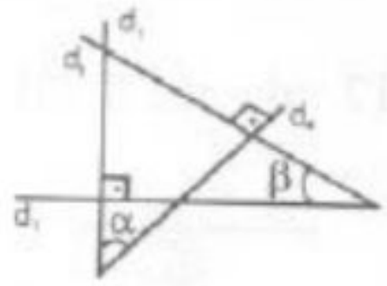
21. $d_1 \perp d_2$, $d_3 \perp d_4$ olarsa,
$\alpha = \beta$



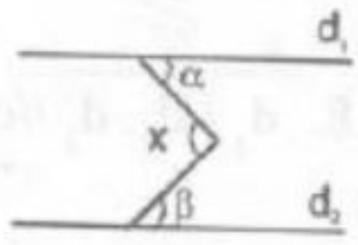
22. $d_1 \perp d_2$, $d_3 \perp d_4$ olarsa,
$\alpha + \beta = 180^\circ$



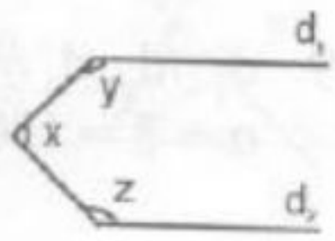
23. $d_1 \perp d_2$, $d_3 \perp d_4$ olarsa,
$\alpha = \beta$



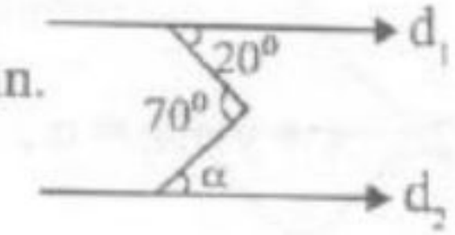
24. a) $d_1 // d_2$ olarsa,
$x = \alpha + \beta$



b) $d_1 // d_2$ olarsa,
$x + y + z = 360^\circ$



Məsələ 1.
Şəklə əsasən α - nı tapın.

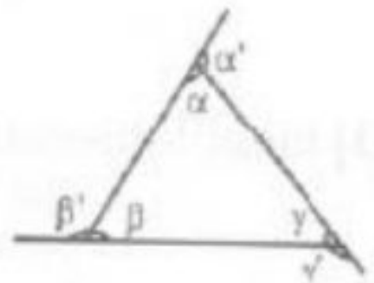


Həlli:

$70^\circ = 20^\circ + \alpha$
$\alpha = 50^\circ$

Üçbucaqlar

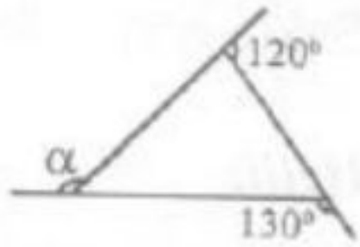
1. Üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 180°, xarici bucaqlarının cəmi isə, 360° -dir.



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ və $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$

Məsələ 1.

Şəklə əsasən $\alpha = ?$

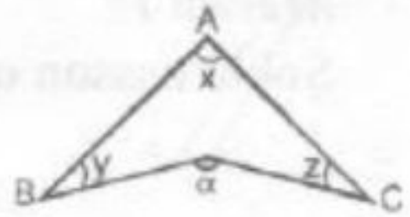


Həlli:

$\alpha + 120^\circ + 130^\circ = 360^\circ$
$\alpha = 110^\circ$

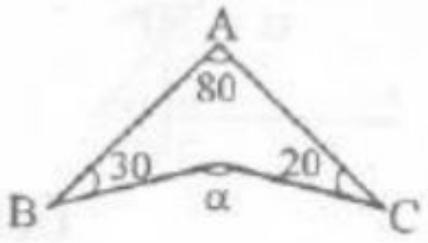
CamScanner ilə skan edilib

2. $x + y + z = \alpha$



Məsələ 1.

Şəklə əsasən $\alpha = ?$

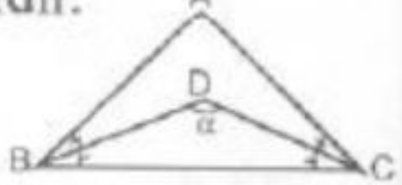


Həlli:

$\alpha = 80 + 30 + 20$

$\alpha = 130^0$

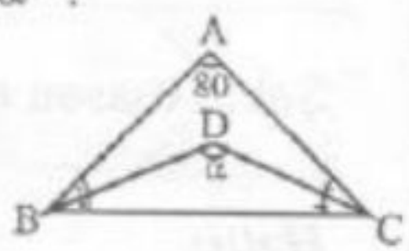
3. [BD] və [CD] tənbölənlərdir.



$$\alpha = 90 + \frac{\angle A}{2}$$

Məsələ 1.

Şəklə görə $\angle A = 80^0$ isə, $\alpha = ?$



Həlli:

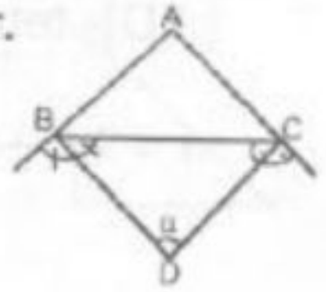
$$\alpha = 90^0 + \frac{\angle A}{2}$$

$$\alpha = 90^0 + \frac{80^0}{2}$$

$$\alpha = 130^0$$

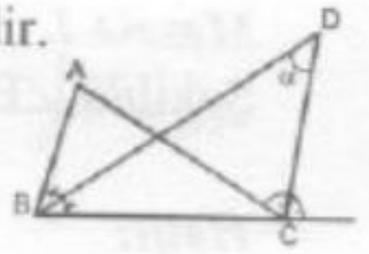
4. [BD] və [DC] tənbölənlərdir.

$$\alpha = 90 - \frac{\angle A}{2}$$



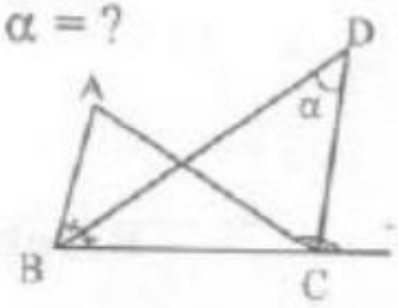
5. [BD] və [DC] tənbölənlərdir.

$$\alpha = \frac{\angle A}{2}$$



Məsələ 1.

Şəkildə $\angle A = 80^0$ olarsa, $\alpha = ?$

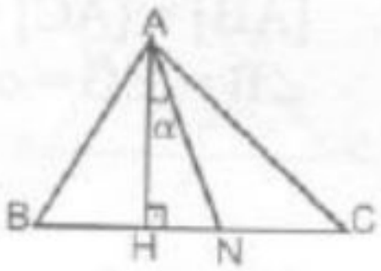


Həlli:

$$\alpha = \frac{\angle A}{2} = 40^0$$

6. [AH] - hündürlük,
[AN] - tənböləndir.

$$\alpha = \frac{|\angle B - \angle C|}{2}$$

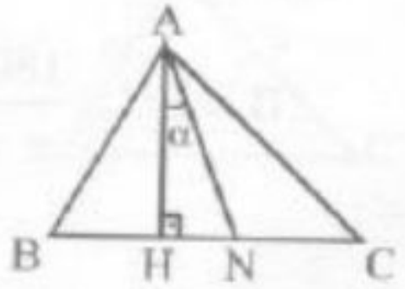


Məsələ 2.

Şəkildə $\angle B = 80^0$ və $\angle C = 30^0$, $\alpha = ?$

Həlli:

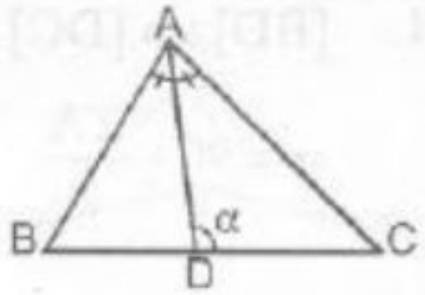
$$\alpha = \frac{80 - 30}{2} = 25$$



CamScanner ilə skan edilib

7. [AD]- tənböləndir

$$\alpha = 90^\circ + \frac{|\angle B - \angle C|}{2}$$



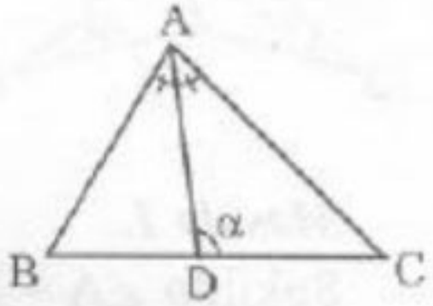
Məsələ 1.

Şəkildə $\angle B = 80^\circ$ və $\angle C = 30^\circ$ isə, $\alpha = ?$

Həlli:

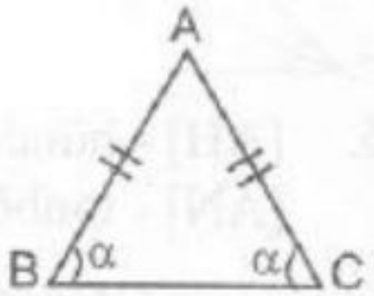
$$\alpha = 90 + \frac{80 - 30}{2}$$

$$a = 115^\circ$$



Bərabəryanlı üçbucaq

8. [AB] = [AC] olarsa,
$\angle B = \angle C = \alpha$

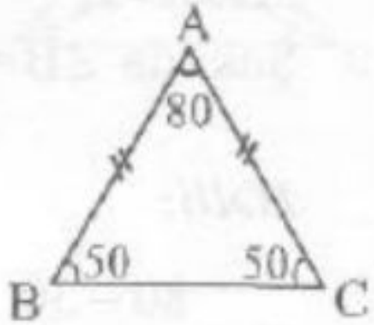


Məsələ 1.

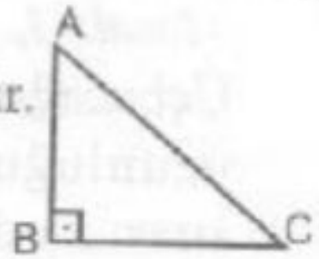
ΔABC-də $AB = AC$, $\angle A = 80^\circ$ isə,
$\angle B = ?$, $\angle C = ?$

Həlli:

$$\angle B = \angle C = \frac{180 - 80}{2} = 50^0$$



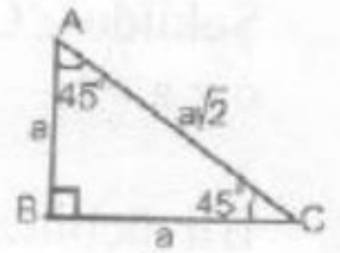
9. ΔABC düzbucaqlı üçbucaqdır.
$\angle B = 90^\circ$



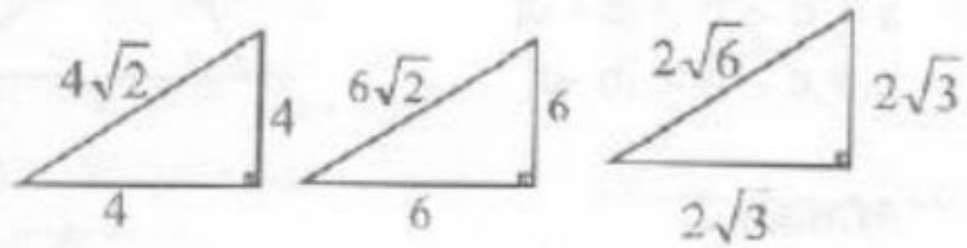
10. Düzbucaqlı üçbucaqda
$|AB| = |BC| = a$
$\angle A = \angle C = 45^\circ$ olarsa,

$AC = a\sqrt{2}$

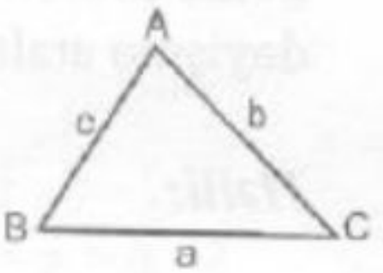
$P = 2a + a\sqrt{2}$



Məsələn:

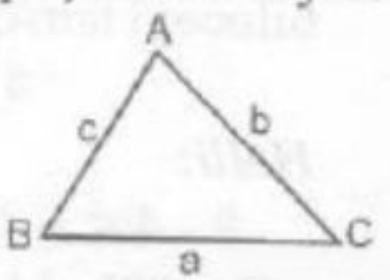


11. Üçbucağın perimetri
$P = |AB| + |AC| + |BC|$,
və ya $P = a + b + c$



Üçbucaqda bucaq tərəf əlaqəsi

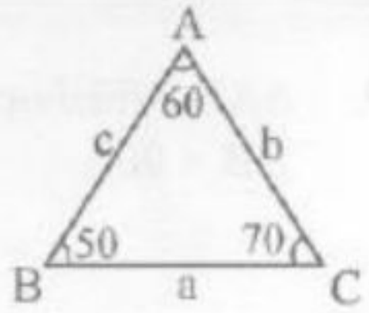
1. Üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf olur.
$\angle A > \angle B > \angle C$ olarsa,
$|BC| > |AC| > |BA|$



CamScanner ilə skan edilib

Məsələ 1.

Üçbucağın tərəflərinin uzunluğunu azalma sırası ilə düzün.



Həlli:

Şəkildə $\angle C > \angle A > \angle B$ olduğuna görə

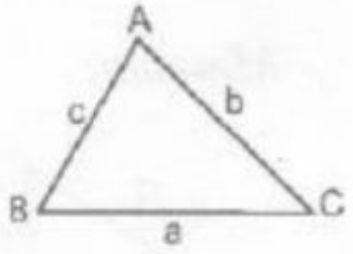
$c > a > b$

2. Bir üçbucaqda iki tərəfin cəmi üçüncü tərəfdən böyük, fərqi isə, üçüncü tərəfdən kiçikdir.

$a + b > c > |a - b|$,

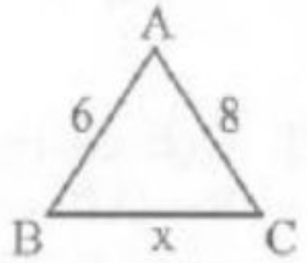
$a + c > b > |a - c|$

$b + c > a > |b - c|$



Məsələ 2.

Şəklə əsasən BC tərəfinin dəyişmə aralığını tapın.



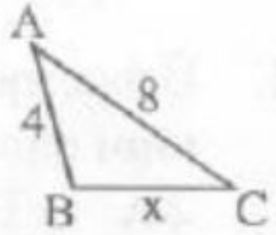
Həlli:

$8 - 6 < x < 6 + 8$

$2 < x < 14$

Məsələ 3.

Şəklə əsasən BC-nin ala biləcəyi tam qiymətləri tapın.



Həlli:

$8 - 4 < x < 8 + 4 \Rightarrow 4 < x < 12$

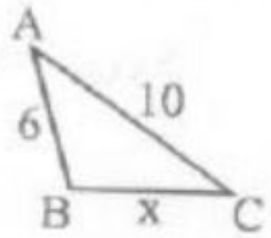
$\angle B > 90^0$ olduğuna görə,

$\angle B > \angle A \Rightarrow 8 > x$, onda

$4 < x < 8$ və $x = 5; 6; 7$ olmalıdır.

Məsələ 4.

Şəklə əsasən BC-nin tam qiymətləri çoxluğunu tapın.



Həlli:

$10 - 6 < x < 10 + 6$

$4 < x < 16$

$\angle B > \angle A$ olduğuna görə

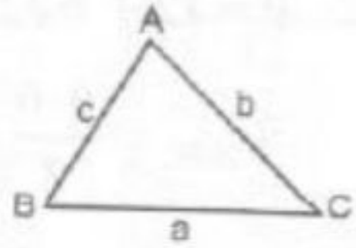
$4 < x < 10$ və $x = 5; 6; 7; 8; 9$ olar.

3. $A > 90^0$ olarsa,

$b + c > a > \sqrt{b^2 + c^2}$

$A < 90^0$ olarsa,

$\sqrt{b^2 + c^2} > a > |b - c|$



Pifaqor teoremi

1. Düzbucaqlı üçbucaq.

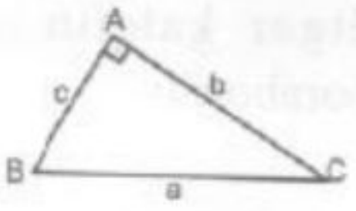
Pifaqor teoremi:

$\angle A = 90^0$ olarsa,

$a^2 = b^2 + c^2$

$\angle B = 90^0$ olarsa, $b^2 = a^2 + c^2$

$\angle C = 90^0$ olarsa, $c^2 = a^2 + b^2$

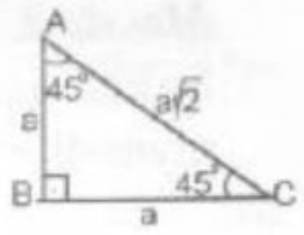


$$S_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c}{2} \; ; \; P_{\Delta ABC} = a + b + c$$

CamScanner ilə skan edilib

Bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaq

1. $\angle B = 90^0$, $|AB| = |BC| = a$ olarsa,

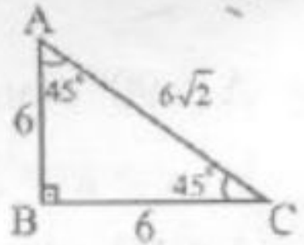


$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}$$

Məsələ 1.

Katetləri 6 sm olan düzbucaqlı üçbucağın perimetrini və sahəsini tapın.

Həlli:

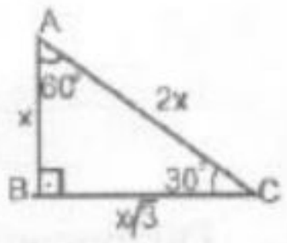


$$P = 12 + 6\sqrt{2}\ sm$$

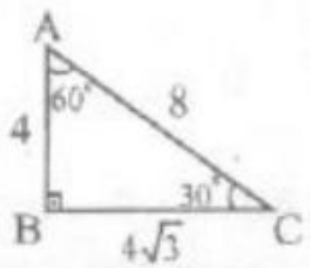
$$S_{\Delta ABC} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ sm^2$$

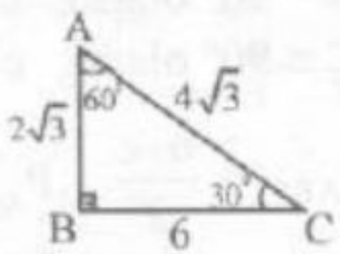
Qeyd:

30^0-li bucaq qarşısındakı katet hipotenuzun yarısına, 60^0-li bucaq qarşısındakı katet digər katetin $\sqrt{3}$ misli̇nə bərabərdir.

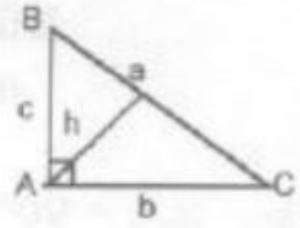


Məsələn:





2. $S_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c}{2}$

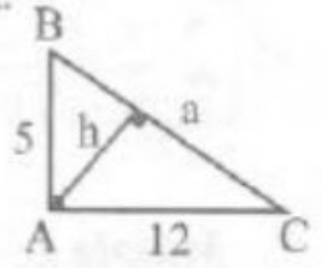


$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$\frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} bc \Rightarrow h = \frac{bc}{a}$$

Məsələ 2.

Şəklə əsasən düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzunu və düz bucaq təpəsindən endirilmiş hündürlüyü tapın.



Həlli:

$$5^2 + 12^2 = a^2; \quad h = \frac{b \cdot c}{a}$$

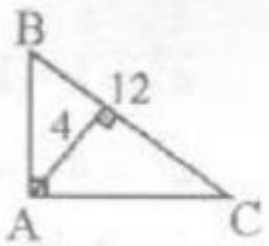
$$a^2 = 169; \qquad h = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13}$$

$$a = 13\ sm \qquad h = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13}\ sm$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30\ sm^2$$

Məsələ 3.

Şəklə əsasən üçbucağın sahəsini tapın.



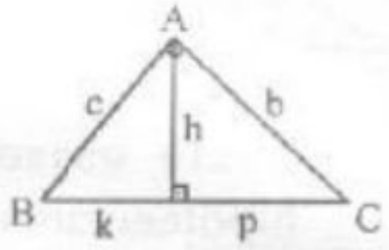
Həlli:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 12}{2} = 24\ sm^2$$

CamScanner ilə skan edilib

Düzbucaqlı üçbucaqda mütənasib parçalar

1. $\angle A = 90^0$ və $BC = a$ olarsa,

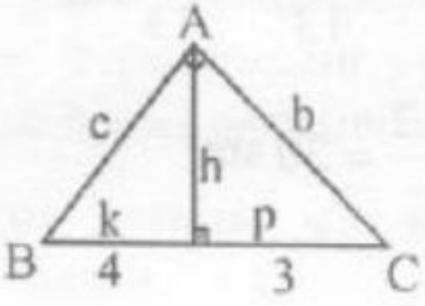


- $h^2 = p \cdot k$
- $c^2 = k(k+p) = k \cdot a$
- $b^2 = p(p+k) = p \cdot a$
- $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $\frac{c}{b} = \sqrt{\frac{k}{p}}$

Məsələ 1.

Şəklə əsasən düzbucaqlı üçbucağın katetlərini və düz bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlüyü tapın.

Həlli:



$h^2 = p \cdot k$

$h^2 = 3 \cdot 4$

$h = 2\sqrt{3}$

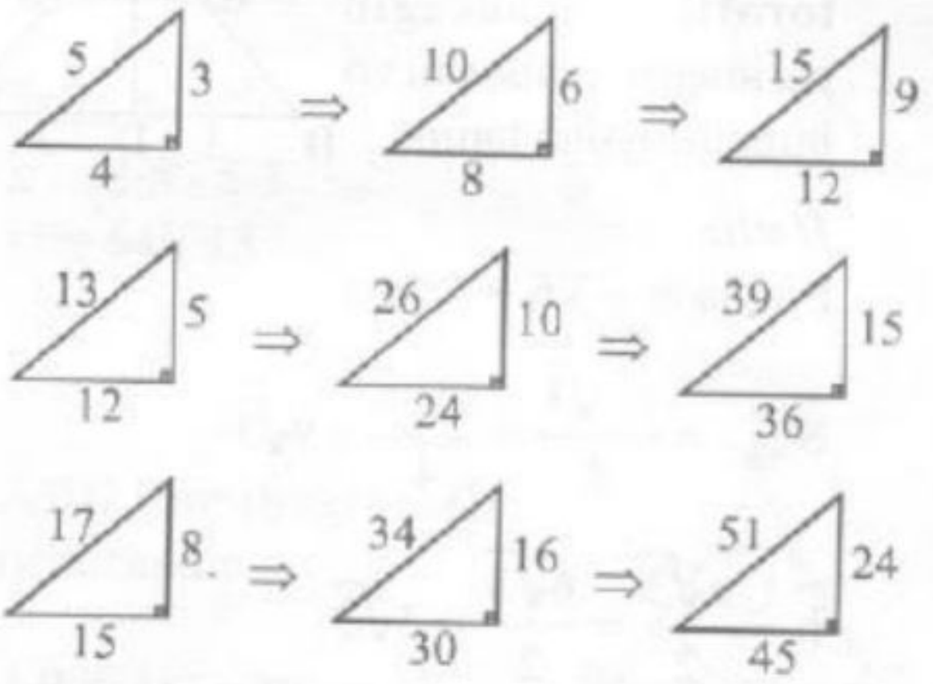
$c^2 = k \cdot (k+p)$ $\quad b^2 = p \cdot (p+k)$

$c^2 = 4 \cdot (4+3)$ $\quad b^2 = 3 \cdot (3+4)$

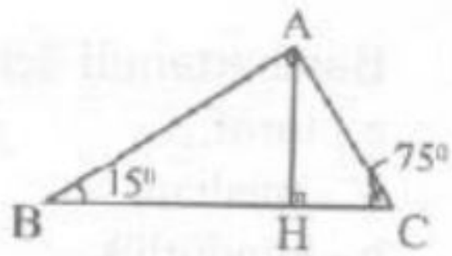
$c = 2\sqrt{7}$ $\quad b = \sqrt{21}$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Pifaqor ədədləri



$\angle A = 90^0$
$\angle B = 15^0$
$\angle C = 75^0$ olarsa,
$AH = a$
$BC = 4a$



Bərabərtərəfli üçbucaq

1. $|AB| = |BC| = |AC| = a$, $P = 3a$

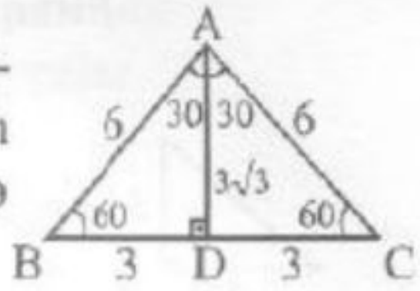
$\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$ $\quad S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$AH = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

CamScanner ilə skan edilib

Məsələ 1.

Şəklə əsasən bərabərtərəfli üçbucağın perimetrini, sahəsini və hündürlüyünü tapın.



Həlli:

$P = 3a = = 3.6 = 18$ sm

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

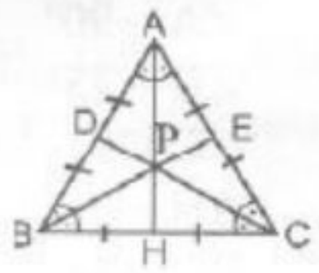
2. Bərabərtərəfli üçbucaqda

a - tərəf,

V - median,

h - hündürlük,

n - tənbölən olarsa,



$$V_a = h_a = n_a = V_b = n_b = h_b = V_c = n_c = h_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

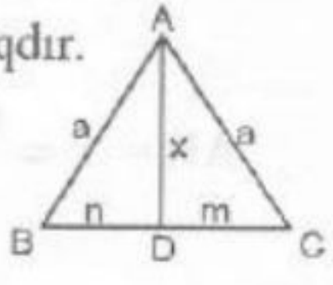
$|AH| = |CD| = |BE|$

$|PA| = |PC| = |PB|$

$|PD| = |PE| = |PH|$

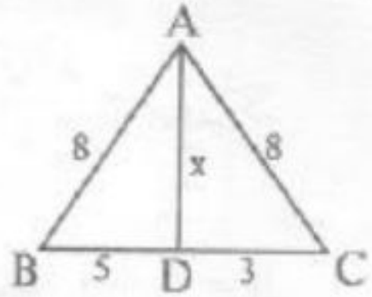
3. ABC bərabərtərəfli üçbucaqdır.

$x^2 = a^2 - (a - n)n$



Məsələ 2.

Şəklə əsasən x = ?



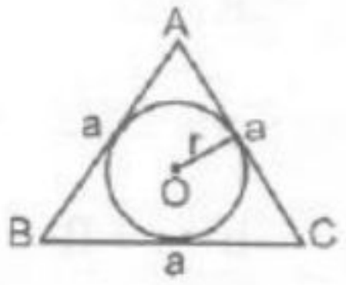
Həlli:

$x^2 = 8 \cdot 8 - 5 \cdot 3$

$x^2 = 64 - 15$

$x = 7$ sm

4. ABC bərabərtərəfli üçbucapdır.



$AB = AC = BC = a$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3} = \frac{v^2\sqrt{3}}{3} = \frac{n^2\sqrt{3}}{3}$$

$h = 3r$

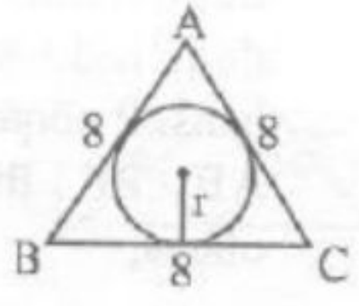
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \qquad S_{\Delta ABC} = 3r^2\sqrt{3}$$

Məsələ 3.

Bərabərtərəfli üçbucağın tərəfi 8 sm-dir. Üçbucağın hündürlüyünü, sahəsini və daxilə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

Həlli:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

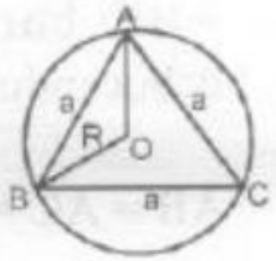


CamScanner ilə skan edilib

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$$

$$h = 3r \Rightarrow 4\sqrt{3} = 3r \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

5. ABC bərabərtərəfli üçbucaqdır.
$R = 2r$

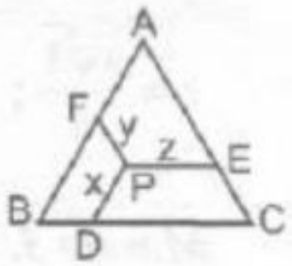


$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

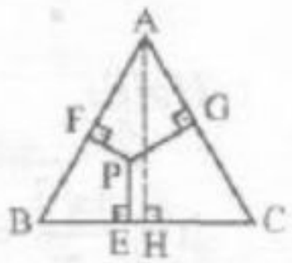
$$h = r + R$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

6. ABC bərabərtərəfli üçbucaqdır. Üçbucaq daxilində olan ixtiyari P nöqtəsi üçün, PE // BC, PF||AC və PD||AB olarsa, $|PD| + |PF| + |PE| = a$



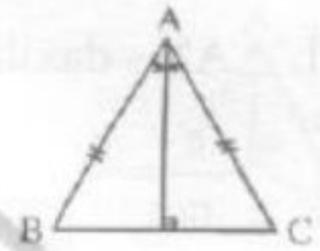
7. ABC bərabərtərəfli üçbucaqdır. Üçbucağın daxilində yerləşən hər hansı P nöqtəsi üçün PE ⊥ AB, PF⊥BC, PG⊥AC, olarsa,



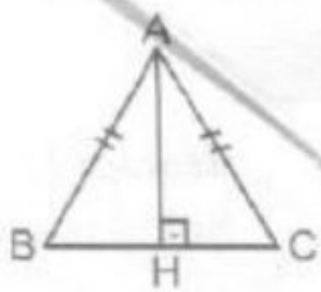
$$|PE| + |PF| + |PG| = AH,\ AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Bərabəryanlı üçbucaq

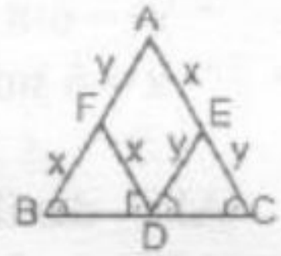
1. Bərabəryanlı ΔABC - də $|AB| = |AC|$ və $\angle B = \angle C$



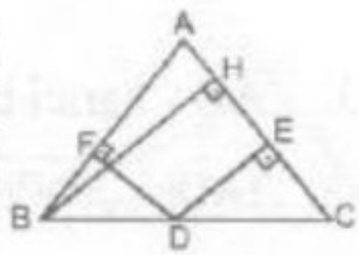
2. AH - tənböləndir.
$|AB| = |AC|$, $|AH| = V_a = h_a =$
$= n_a$ (median = hündürlük = tənbölən)



3. $|AB| = |AC|$. Üçbucağın oturacağı üzərində olan ixtiyari D nöqtəsi üçün DE //BA və DF // AC olarsa, $|DE| + |DF| = |AC| = |AB|$



4. $|AB| = |AC|$ və BC tərəfi üzərində olan ixtiyari D nöqtəsi üçün, DF⊥AB, DE⊥AC, BH⊥AC isə, $|DE| + |DF| = |BH|$



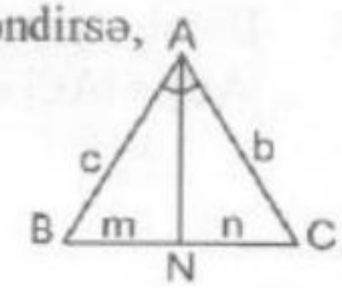
CamScanner ilə skan edilib

Tənbölən

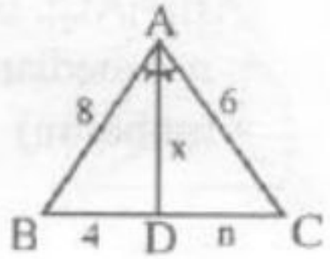
1. AN - daxili bucaq tənböləndirsə,

$$\frac{c}{m}=\frac{b}{n}$$

$$|AN| = \sqrt{b\cdot c - m\cdot n}$$



Məsələ 1.
Şəklə əsasən x = ?



Həlli:

$$\frac{8}{4}=\frac{6}{n} \Rightarrow n=3$$

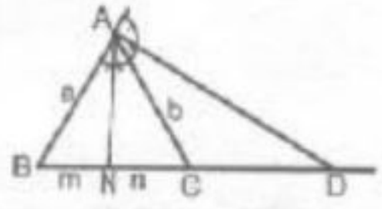
$x^2 = b\cdot c - m\cdot n$

$x^2 = 6\cdot 8 - 4\cdot 3$

$x = 6$ sm

2. |AN| - daxili bucaq tənböləni
|AD| - xarici bucaq tənbölənidirsə,

$$\frac{|BD|}{|CD|}=\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$$

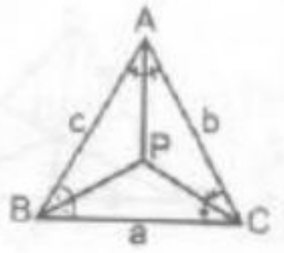


3. AD - xarici bucaq tənbölənidirsə,

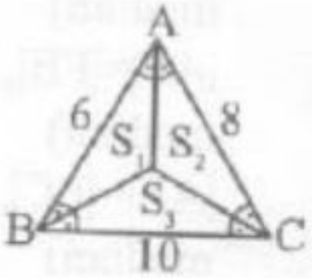
$$|AD| = \sqrt{|DC|\cdot|DB| - |AB|\cdot|AC|}$$

4. AP, BP, CP, - daxili bucaq tənbölənləridir:

$$\frac{S_{\Delta BPC}}{a}=\frac{S_{\Delta APC}}{b}=\frac{S_{\Delta APB}}{c}$$



Məsələ 2.
Şəklə əsasən S_1, S_2 və S_3-ü tapın.



Həlli:
$6^2 + 8^2 = 10^2$ olduğu üçün $\angle A = 90^\circ$ və

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24 \qquad \frac{S_1}{6}=\frac{S_2}{8}=\frac{S_3}{10}=k,$$

$S_1 = 6k, \quad S_2 = 8k, \quad S_3 = 10k$

$S_1 + S_2 + S_3 = S_{\Delta ABC}$, $6k + 8k + 10k = 24$

$24k = 24$, $k = 1$, $S_1 = 6$, $S_2 = 8$, $S_3 = 10$

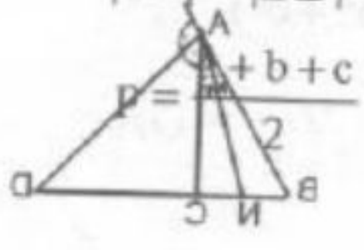
5. Üçbucaqda tənbölənlərin kəsişdiyi nöqtə, daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir.

|PE| = |PF| = |PD| = r

|AE| = |AF| = p - a

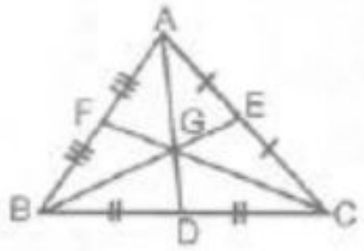
|EC| = |CD| = p - c

|BF| = |BD| = p - b



CamScanner ilə skan edilib

Üçbucağın medianı

1. 

|BD|=|DC|, |AD| =V_a (BC tərəfinə çəkilmiş median)
|AF|=|FB|, |FC| =V_c(AB tərəfinə çəkilmiş median)
|AE|=|EC|, |BE| =V_b (AC tərəfinə çəkilmiş median)

♦ Üçbucağın medianları bir nöqtədə kəsişirlər. Bu nöqtəyə üçbucağın ağırlıq mərkəzi deyilir. və G ilə göstərilir.

$AD = V_a \qquad FC = V_c \qquad BE = V_b$

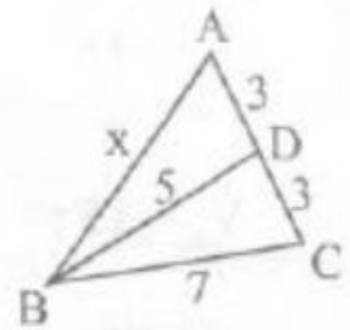
2. $\Rightarrow 2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow 2V_b^2 = c^2 + a^2 - \frac{b^2}{2}$

$\Rightarrow 2V_c^2 = b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}$

$\Rightarrow V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

Məsələ 1.
Şəklə əsasən x = ?



Həlli:

$2V_b^2 = c^2 + a^2 - \frac{b^2}{2}$

$2 \cdot 5^2 = x^2 + 7^2 - \frac{6^2}{2}$

$50 = x^2 + 49 - 18$

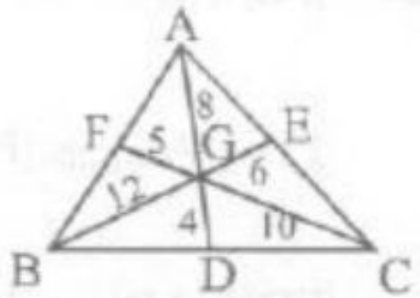
$x = \sqrt{19}$

3. $\Rightarrow |AG| = \frac{2}{3}V_a \qquad \Rightarrow |GD| = \frac{1}{3}V_a$

$\Rightarrow |BG| = \frac{2}{3}V_b \qquad \Rightarrow |GE| = \frac{1}{3}V_b$

$\Rightarrow |GC| = \frac{2}{3}V_c \qquad \Rightarrow |FG| = \frac{1}{3}V_c$

Məsələ 2:
$V_a = 12$, $V_b = 18$, $V_c = 15$ olarsa, medianların kəsişmə nöqtəsində bölündüyü hissələrin uzunluğunu tapın.



Həlli:
$V_a = 12$

$AG = \frac{2}{3}V_a = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$

CamScanner ilə skan edilib

$$V_b = 18; \quad BG = \frac{2}{3}V_b = \frac{2}{3}\cdot 18 = 12$$

$$V_c = 15; \quad CG = \frac{2}{3}V_c = \frac{2}{3}\cdot 15 = 10$$

$$GD = \frac{1}{3}V_a = \frac{1}{3}\cdot 12 = 4$$

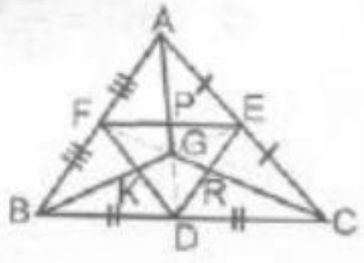
$$GE = \frac{1}{3}V_b = \frac{1}{3}\cdot 18 = 6$$

$$GF = \frac{1}{3}V_c = \frac{1}{3}\cdot 5 = 5$$

4. $|AP| = |PD|, \quad |PG| = \frac{1}{6}V_a$

$|FR| = |RC|, \quad |KG| = \frac{1}{6}V_b$

$|BK| = |KE|, \quad |GR| = \frac{1}{6}V_c$

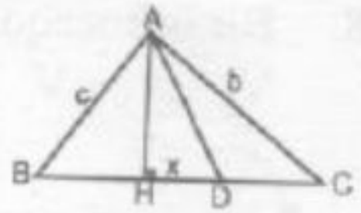


5. $|FE| \parallel |BC| \Rightarrow |FE| = \frac{|BC|}{2}, |FP| = |PE| = \frac{|BC|}{4}$

$|FD| \parallel |AC| \Rightarrow |FD| = \frac{|AC|}{2}, |FK| = |KD| = \frac{|AC|}{4}$

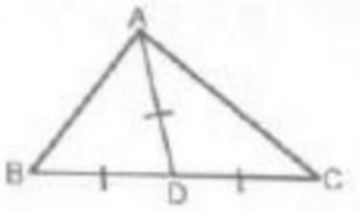
$|ED| \parallel |AB| \Rightarrow |ED| = \frac{|AB|}{2}, |DR| = |RE| = \frac{|AB|}{4}$

6. AH - hündürlük,
$|BC| = a$, AD-median,
$HD = x$ isə, $|b^2 - c^2| = 2ax$



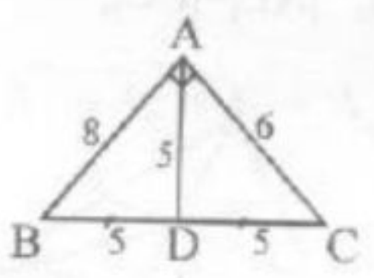
7. ΔABC-də $|BD| = |DC| = |AD|$ olarsa, $\angle A = 90^\circ$, $|AD| = V_a$-median və $|BC| = a$ olarsa,

$V_a = \frac{a}{2}$;

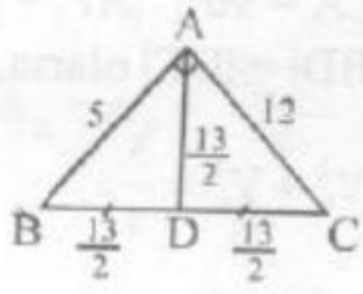


Məsələ 3:

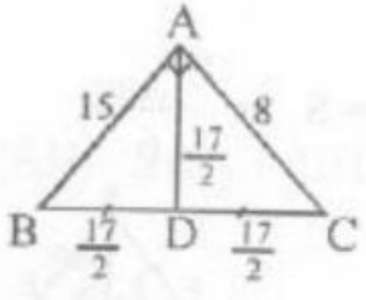
Aşağıdakı düzbucaqlı üçbucaqlarda verilmiş katetlərə əsasən düz bucaq təpəsindən çəkilmiş megianların tapılması üsulu göstərilmişdir.



AD = 5



AD = 6,5



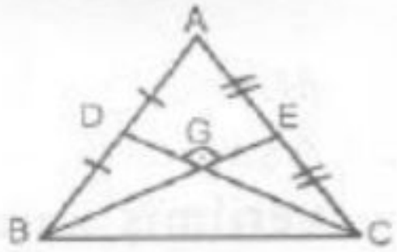
AD = 8,5

CamScanner ilə skan edilib

8. Bir üçbucaqda $a > b > c$ olarsa, onda
$V_a < V_b < V_c$

9. Üçbucağın V_a, V_b, V_c medianları və $P = \frac{a+b+c}{2}$ yarımperimetri arasında aşağıdakı kimi əlaqə vardır.
$P < V_a + V_b + V_c < 2P$
$|V_a - V_b| < V_c < V_a + V_b$

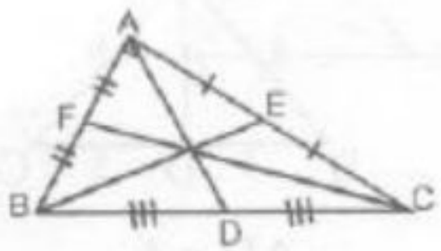
10. $|BE| \perp |DC|$, $|BE| = V_b$, $|DC| = V_c$ olarsa,
$V_b^2 + V_c^2 = V_a^2$



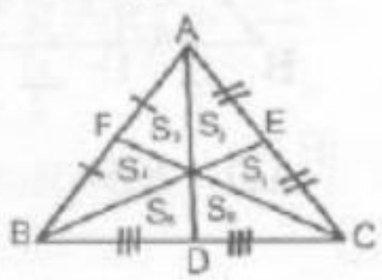
11. $\angle A = 90^\circ$, $|AF| = |FB|$, $|AE| = |EC|$, $|BD| = |DC|$ olarsa,

$V_b^2 + V_c^2 = \frac{5}{4}a^2$

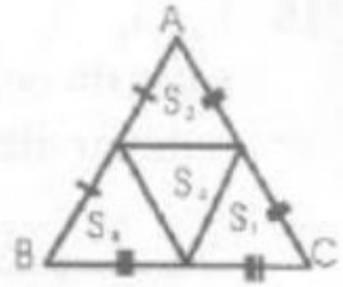
$V_b^2 + V_c^2 = 5V_a^2$



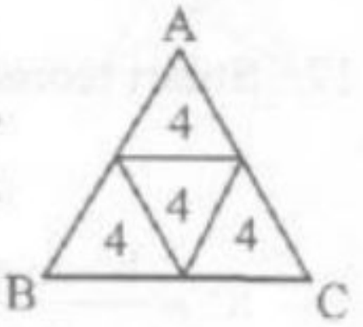
12. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{S_{\Delta ABC}}{6}$



13. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S_{(ABC)}}{4}$



Məsələ 4.
$S_{\Delta ABC} = 16$ sm² olarsa, üçbucağın orta xətlərlə ayrıldığı üçbucaqların sahəsini tapın.



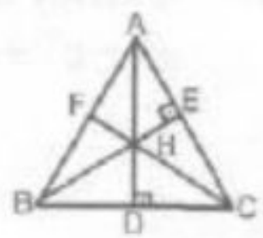
Həlli:

$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{16}{4} = 4$ sm²

14. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{S_{(ABC)}}{24}$

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = \frac{S_{(ABC)}}{8}$

15. $|AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE| = |CH| \cdot |HF|$

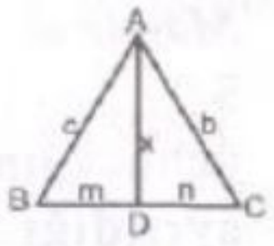


CamScanner ilə skan edilib

16. h_a, h_b, h_c - hündürlüklər, r-daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu olarsa,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

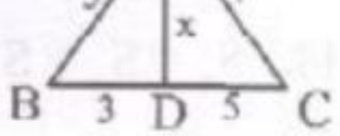
17. Stüart teoremi:



$$x^2=\frac{b^2\cdot m+c^2\cdot n}{n+m}-m\cdot n$$

Məsələ 5.

Şəklə əsasən x = ?



Həlli:

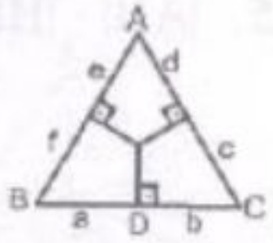
$$x^2=\frac{5^2\cdot 5+7^2\cdot 3}{3+5}-7\cdot 3$$

$$x^2=\frac{125+147}{8}-15$$

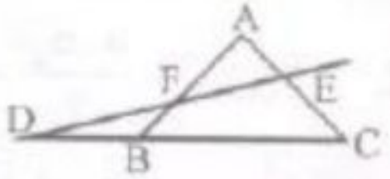
$$x=\sqrt{19}$$

18. Çarnot teoremi:

$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2$

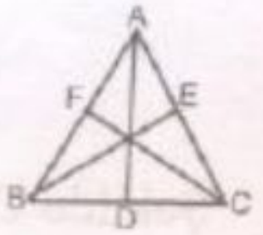


19. Menelay teoremi:



$$\frac{|DB|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}=1$$

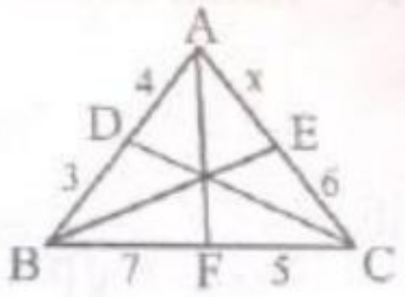
20. Çeva teoremi:



$$\frac{|DB|}{|DC|}\cdot\frac{|EC|}{|EA|}\cdot\frac{|FA|}{|FB|}=1$$

Məsələ 6.

Şəklə əsasən x-i tapın.



Həlli:

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{6}{x}\cdot\frac{4}{3}=1$$

$$x=\frac{56}{5}=11{,}2$$

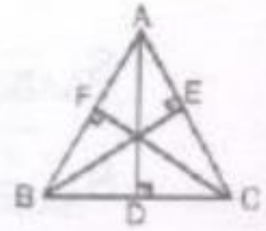
Üçbucaqda sahə

1. Üçbucağın sahəsi, tərəfinin uzunluğu ilə o tərəfə çəkilmiş olan hündürlüyü hasilinin yarısına bərabərdir:

$|AD| = h_a$, $|BE| = h_b$, $|CF| = h_c$ və

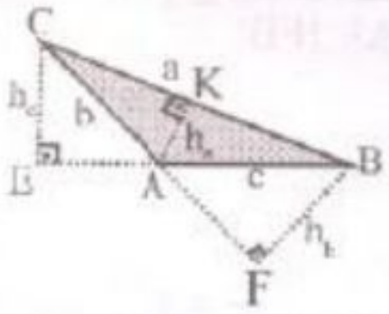
$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ olarsa,

$$S_{(ABC)}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$$



CamScanner ilə skan edilib

2. $S_{(ABC)} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$



Şəkildə $CE = h_c$, $AK = h_a$, $BF = h_b$

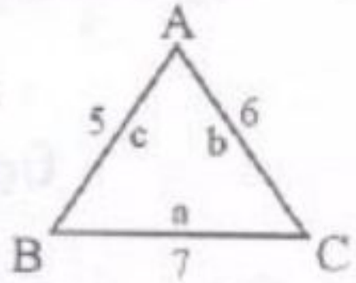
3. Heron düsturu:

$$a + b + c = 2p \quad \supset P = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

Məsələ 7.

Şəklə əsasən üçbucağın sahəsini və hündürlüklərini tapın.



Həlli:

$$a + b + c = 2P$$

$$5 + 6 + 7 = 2P \quad \supset P = 9$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{9 \cdot (9-5) \cdot (9-6) \cdot (9-7)}$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$S_{\Delta ABC} = 6\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = 6\sqrt{6}$$

$$\frac{7 \cdot h_a}{2} = 6\sqrt{6} \quad 7h_a = 12\sqrt{6}, \quad h_a = \frac{12\sqrt{6}}{7}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot h_b}{2} = 6\sqrt{6}$$

$$\frac{6 \cdot h_b}{2} = 6\sqrt{6} \quad h_b = 2\sqrt{6}$$

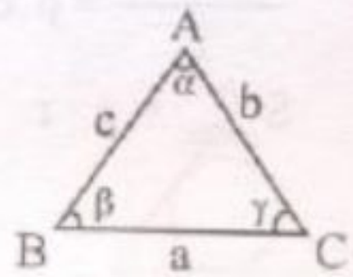
$$S_{\Delta ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2} = 6\sqrt{6}$$

$$\frac{5 \cdot h_c}{2} = 6\sqrt{6} \qquad h_c = \frac{12\sqrt{6}}{5}$$

4. ΔABC-də a, b, c - tərəflər, α, β, γ, daxili bucaqlar olarsa,

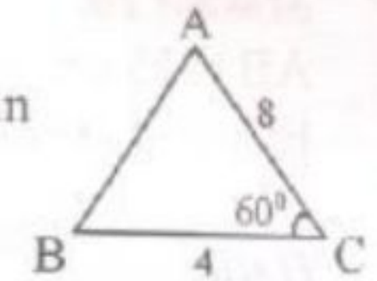
$$S_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}, \quad S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$



Məsələ 8.

Şəklə əsasən üçbucağın sahəsini tapın.



Həlli:

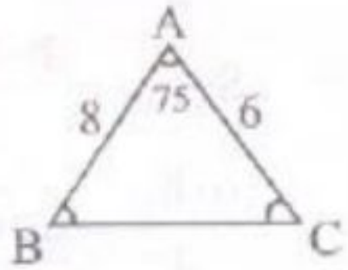
$$S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\frac{\sqrt{3}}{2}$$

CamScanner ilə skan edilib

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};\ S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}\ \text{sm}$$

Məsələ 9.

$AB = 8, AC = 6,$
$\angle A = 75^0$ olarsa,
$S_{\Delta ABC} = ?$



Həlli:

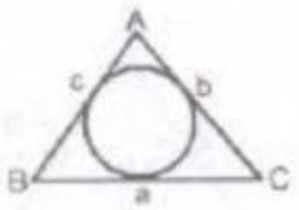
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}6\cdot 8\cdot \sin 75^0 = \frac{1}{2}6\cdot 8\cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) =$$

$$= 6\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\text{sm}^2$$

5. r-daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu,

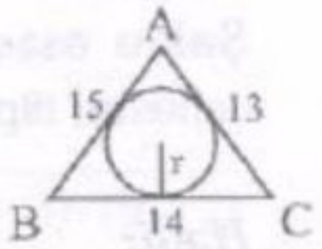
$\frac{a+b+c}{2} = p$ olarsa,

$S_{\Delta ABC} = p \cdot r$



Məsələ 10.

$AB = 15$ sm, $AC = 13$ sm,
$BC = 14$ sm olarsa, $r = ?$



Həlli:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{14+13+15}{2} = 21\,\text{sm}$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} =$$

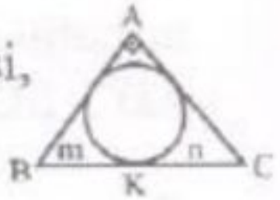
$$= \sqrt{21\cdot 7\cdot 8\cdot 6} = 84\ \text{sm}^2$$

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{84}{21} = 4\ \text{sm}$$

6. R-xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu olarsa,

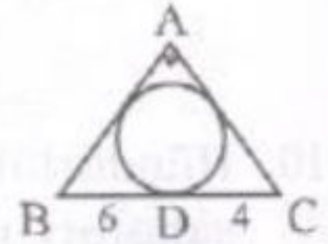
$$S_{\Delta ABC} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$$

7. $\angle A = 90^0$, K-toxunma nöqtəsi,
$BK = m$,
$KC = n$ olarsa,
$S_{(ABC)} = m \cdot n$



Məsələ 11.

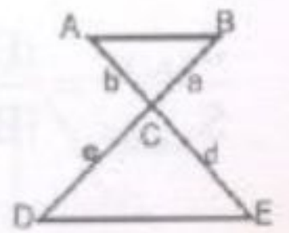
Şəklə əsasən $S_{\Delta ABC} = ?$



Həlli:

$S_{\Delta ABC} = m\cdot n = 6\cdot 4$
$S_{\Delta ABC} = 24\ \text{sm}^2$

8. $\frac{S_{(ABC)}}{S_{(DBC)}} = \frac{a\cdot b}{e\cdot d}$

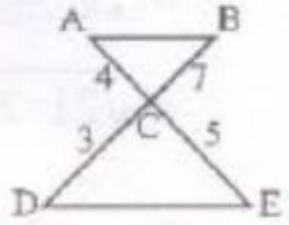


CamScanner ilə skan edilib

Məsələ 12.

Şəkildə verilənlərə gösə

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEC}}$ nisbətini tapın.



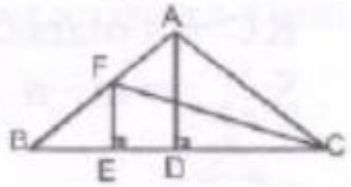
Həlli:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEC}} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{28}{15}$$

9. Oturacaqları eyni olan üçbucaqların sahələri nisbəti, onların hündürlükləri nisbətinə bərabərdir.

$AD \perp BC$, $FE \perp BC$ olarsa,

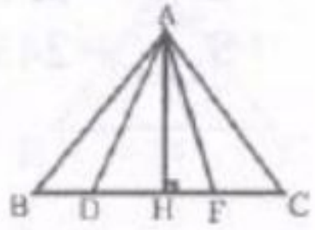
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BFC}} = \frac{|AD|}{|FE|}$$



10. Hündürlükləri eyni olan üçbucaqların sahələri nisbəti, onların oturacaqları nisbətinə bərabərdir.

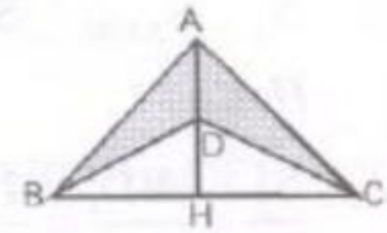
$$\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta AFC}} = \frac{|BD|}{|FC|},$$

$$\frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{|DF|}{|BC|}$$



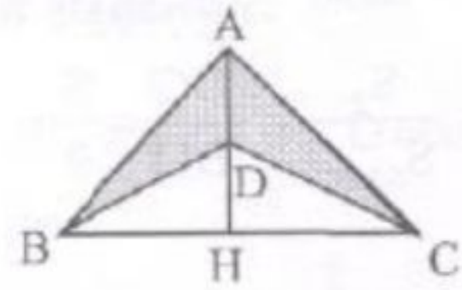
11. $|AH| \perp |BC|$ olarsa, $S = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2}$

Burada, S = qeyd edilmiş sahədir.



Məsələ 13.

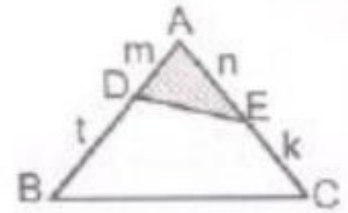
$AD = 4, BC = 8$ olarsa, $S_{qeyd.ed} = ?$



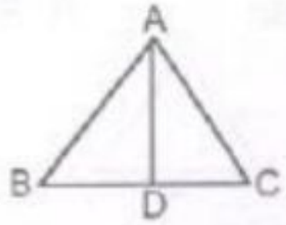
Həlli:

$$\text{Qeyd edilmiş sahə} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ sm}^2$$

12. $$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{m \cdot n}{(m+t) \cdot (n+k)}$$



13. $$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{|BC|}{|BD|}$$



CamScanner ilə skan edilib

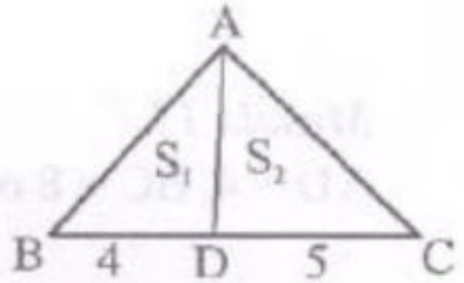
Məsələ 14.

Şəkildə verilənlərə görə

$\frac{S_1}{S_2}$, $\frac{S_1}{S_{\Delta ABC}}$, $\frac{S_2}{S_{\Delta ABC}}$ nisbətlərini tapın.

Həlli:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{4}{5}$$



$$\frac{S_1}{S_{\Delta ABC}} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{S_2}{S_{\Delta ABC}} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{5}{9}$$

14. TF // AB, RG // BC, DE // AC

$$S_{\Delta ABC} = \left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3}\right)^2$$

15. $\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r \cdot t \cdot m + k \cdot n \cdot p}{a \cdot b \cdot c}$

Üçbucaqların bərabərliyi

$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle D \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle F \\ a = d \\ c = f \\ b = e \end{array}\right\}$ olarsa, $\Delta ABC = \Delta DEF$

Bərabərlik əlamətləri

1. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$ və $\angle A = \angle D$ olarsa, $\Delta ABC = \Delta DEF$

2. $|BC| = |EF|$, $\angle B = \angle E$ və $\angle C = \angle F$ olarsa, $\Delta ABC = \Delta DEF$

3. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$ olarsa, $\Delta ABC = \Delta DEF$

CamScanner ilə skan edilib

Üçbucaqların oxşarlığı
Oxşarlıq əlamətləri

1. $\angle A = \angle D$ və $\angle B = \angle E$ olarsa,
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

2. $\angle A = \angle D$ və $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ olarsa,
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

3. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ olarsa, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Oxşar üçbucaqlarda:
$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F$

$$\frac{c}{f} = \frac{b}{e} = \frac{a}{d} = \frac{h_a}{h_d} = \frac{V_a}{V_d} = \frac{n_A}{n_d} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{P_{(ABC)}}{P_{(DEF)}} = k$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEF}} = k^2$$

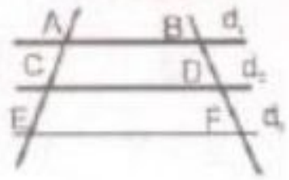
Məsələ 1.
İki oxşar üçbucağın medianlarının nisbəti $\frac{4}{3}$ isə, onların sahələrinin nisbətini tapın.

$$\frac{S(ABC)}{S(DEF)} = k^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

4. Fales teoremi $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ olarsa,

1) $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$

2) $\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF}$



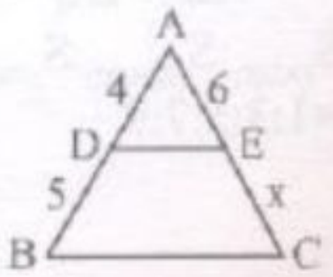
5. DE // BC olarsa,

1) $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$, 2) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

Məsələ 2.
Şəkildəki verilənlərə əsasən x = ?

Həlli:

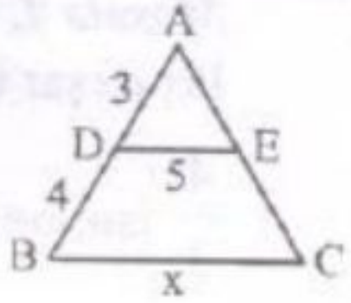
$\frac{4}{5} = \frac{6}{x}$; x = 7,5 sm



CamScanner ilə skan edilib

Məsələ 3.

Şəklə əsasən x - i tapın.

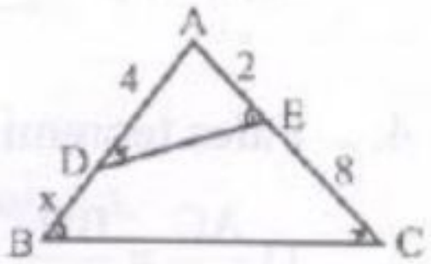


Həlli:

$$\frac{3}{7}=\frac{5}{x} \Rightarrow x=\frac{35}{3}$$

Məsələ 4.

Şəklə görə x - i tapın.

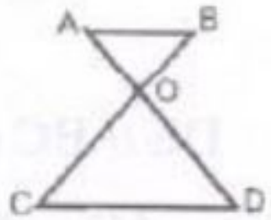


Həlli:

$$\frac{4}{2+8}=\frac{2}{x+4}; \quad x=1 \text{ sm}$$

6. AB // CD olarsa,

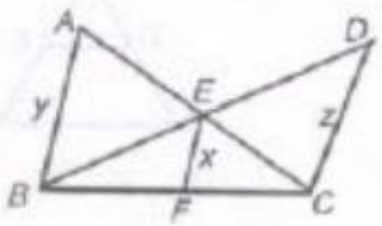
$$\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}=\frac{AB}{CD}$$



7. AB // EF // DC olarsa,

1) $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$;

2) $\frac{y}{BF}=\frac{z}{FC}$

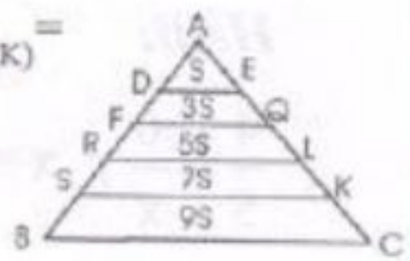


8. AD = DF = FR = RS = SB

AE = EQ = QL = LK = KC

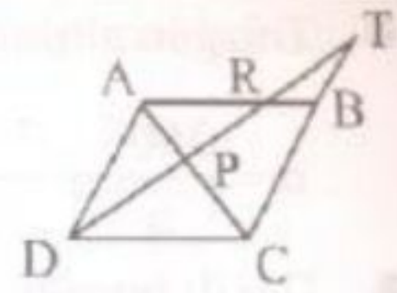
$S_{(ADE)}:S_{(DFQE)}:S_{(FRLQ)}:S_{(RSKL)}:S_{(SBCK)}$ =

=1:3:5:7:9



9. ABCD paraleloqramdır.

$|DP|^2 = |PR| \cdot |PT|$



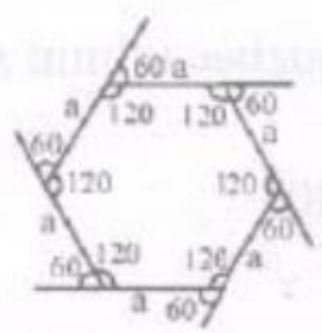
Çoxbucaqlılar

- Çoxbucaqlı n tərəfli olarsa,
- Daxili bucaqlarının cəmi = $(n - 2)180^0$
- Xarici bucaqlarının cəmi = 360^0
- Diaqonallarının sayı = $\frac{n(n-3)}{2}$
- Ulduzlu çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi = $(n - 4)180^0$-dir.

Düzgün çoxbucaqlılar

- Xarici bucaq $\alpha = \frac{360^0}{n}$
- Daxili bucaq $\beta = \frac{180^0(n-2)}{n}$

1. Xarici bucaqları bərabərdir.
2. Daxili bucaqları bərabərdir.
3. Tərəflərin uzunluqları eynidir.



CamScanner ilə skan edilib

- Düzgün altıbucaqlının bir xarici bucağı:

$$\alpha = \frac{360^0}{n} = \frac{360^0}{6} = 60^0$$

- Daxili bucağı:

$$\beta = \frac{180^0 \cdot (6-2)}{6} = \frac{180^0 \cdot 4}{6} = 120^0$$

- Qabarıq altıbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi = $(6 - 2)\cdot 180^0 = 720^0$

- Qabarıq səkkizbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi = $(8-2)\cdot 180^0 = 6\cdot 180^0 = 1080^0$

- Altıbucaqlının diaqonallarının sayı :

$$\frac{6(6-3)}{2} = 9$$

- Doqquzbucaqlının diaqonalların sayı:

$$\frac{9(9-3)}{2} = \frac{9\cdot 6}{2} = 27$$

- Düzgün beşbucaqlının xarici bucağı:

$$\alpha = \frac{360^0}{5} = 72^0$$

- Düzgün doqquzbucaqlının xarici bucağı:

$$\alpha = \frac{360^0}{9} = 40^0$$

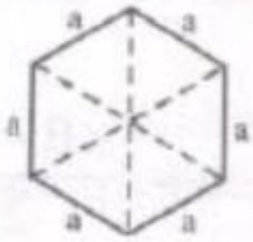
- Düzgün on iki bucaqlının xarici bucağı

$$\alpha = \frac{360^0}{12} = 30^0$$

Düzgün altı bucaqlı

1. $P = 6a,$

2. $S = 6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$



Məsələ 1.
Perimetri 24 sm olan düzgün altıbucaqlının tərəfini və sahəsini tapın.

Həlli:

$P = 6a$

$24 = 6a$

$a = 4$ sm

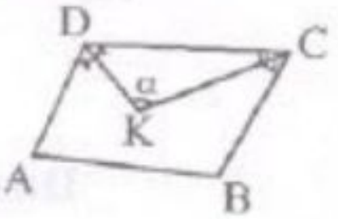
$$S = 6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = 6\left(\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right) = 24\sqrt{3}$$

CamScanner ilə skan edilib

Dördbucaqlı

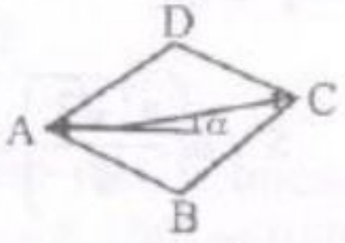
DK və CK tənbölənlərdirsə,

1. $\alpha = \dfrac{\angle A + \angle B}{2}$



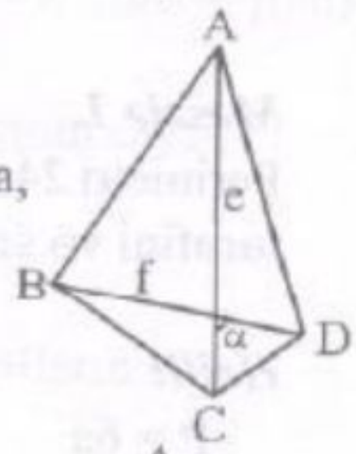
AK və CK tənbölənlərdirsə,

2. $\alpha = \dfrac{|\angle B - \angle D|}{2}$



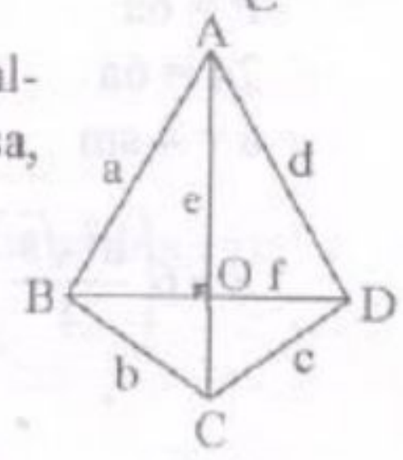
3. $|AC| = e$, $|BD| = f$ olarsa,

$$S_{(ABCD)} = \frac{1}{2} e \cdot f \sin\alpha$$

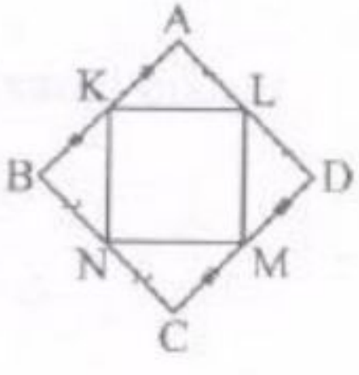


4. Dördbucaqlının diaqonalları perpendikulyar olarsa,
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

$$S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2}$$



5. ABCD dördbucaqlı, M, N, K, L tərəflərin orta nöqtələri olarsa, KLMN paraleloqramdır:

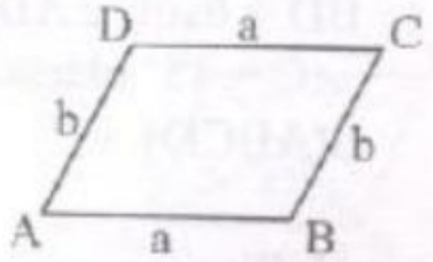


Paraleloqramlar

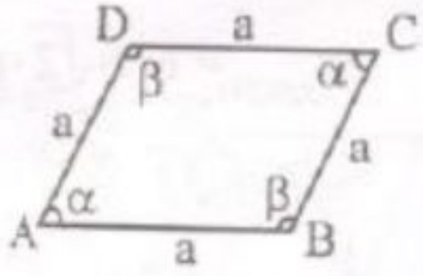
- Qarşı tərəfləri bir-birinə bərabər və paraleldir.
- Diaqonallar tənbölən deyil.
- Diaqonalların uzunluqları fərqlidir.
- Qarşılıqlı bucaqlar bərabərdir.
- Diaqonal paraleloqramı iki bərabər üçbucağa ayırır.
- Paraleloqramda tərəflərin nisbəti, hündürlükləri nisbətinin tərs qiymətinə bərabərdir.

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}\right)$$

1. $P = 2(a + b)$



2. $\alpha + \beta = 180^\circ$ - dir.



Məsələ 1.

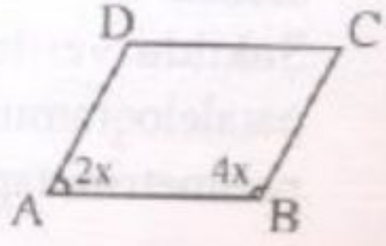
Şəkildə verilənlərə əsasən x = ?

Həlli:

$2x + 4x = 180^\circ$

$6x = 180^\circ$

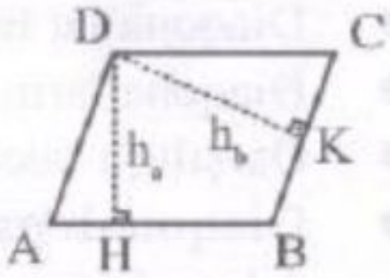
$x = 30^\circ$



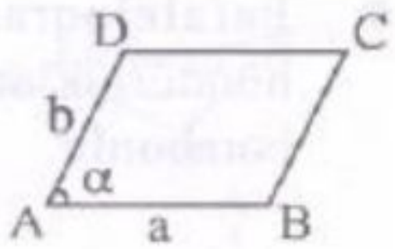
CamScanner ilə skan edilib

Paraleloqramda sahə

- $AB = a$, $BC = b$, $DH = h_a$, $DK = h_b$ olarsa,



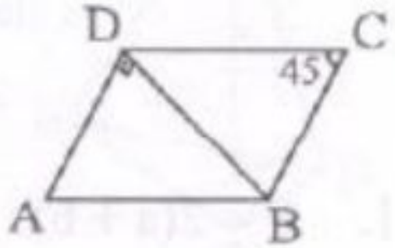
1. $S_{(ABCD)} = a \cdot h_a = b \cdot h_b$
   $P = 2(a + b)$
   $AB = a$, $BC = b$



2. $S_{(ABCD)} = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

Məsələ 1.

$BD = 6$sm, $\angle ADB = 90^0$, $\angle C = 45^0$ olarsa, $S(ABCD) = ?$

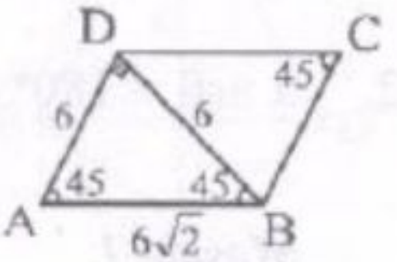


Həlli:

$$S_{(ABCD)} = 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sin 45^0 =$$

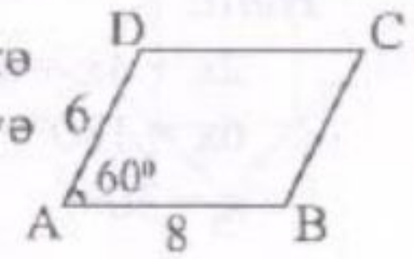
$$= 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{(ABCD)} = 36 \text{ sm}^2$$



Məsələ 2.

Şəkildə verilənlərə görə paraleloqramın sahəsini və perimetrini tapın:

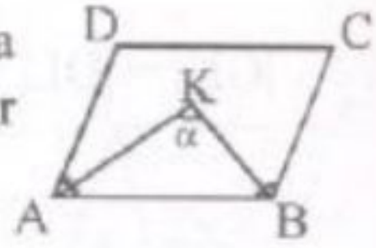


Həlli:

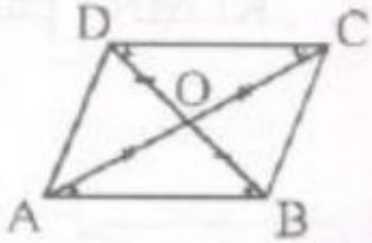
$$S_{(ABCD)} = 6 \cdot 4 \cdot \sin 60^0 = 24 \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ sm}^2$$

$P = 2(a + b) = 2(8 + 6) = 28$ sm

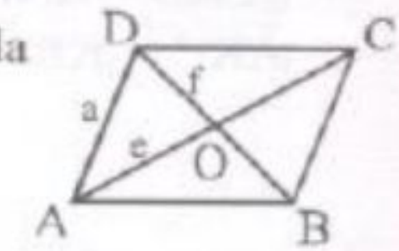
3. ABCD paraleloqramında AK, BK tənbölənlər olarsa, $\alpha = 90^0$-dir.



4. $|OA| = |OC|$, $|OB| = |OD|$ və $|AC| \neq |BD|$

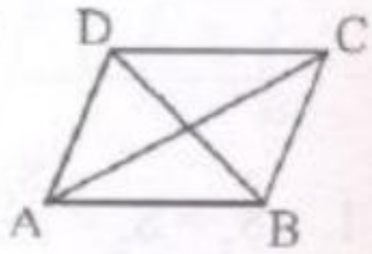


5. $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$, burada $AC = e$, $BD = f$



Məsələ 3.

$AC = e = 8$ sm, $BD = f = 6$ sm, və $a = 4$ sm olarsa, $b = ?$



Həlli:

$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$

$8^2 + 6^2 = 2(4^2 + b^2)$

$50 = 16 + b^2$

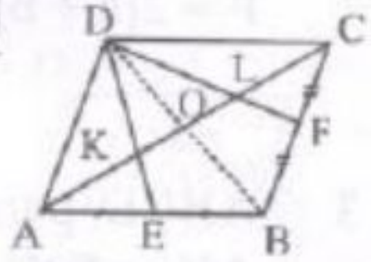
$b = \sqrt{34}$ sm

CamScanner ilə skan edilib

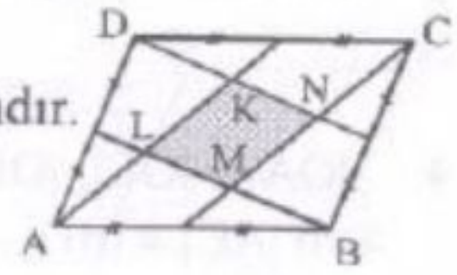
- ABDC paraleloqramında AE = EB və BF = FC olarsa,

6. $|AK| = |KL| = |LC| = \frac{|AC|}{3}$

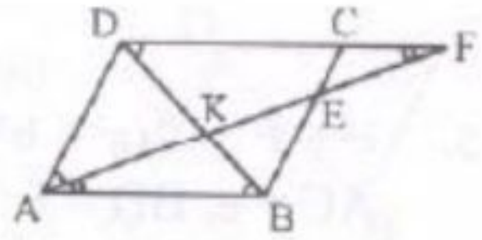
$|OK| = |OL| = \frac{|AC|}{6}$



7. KLMN - paraleloqramdır.

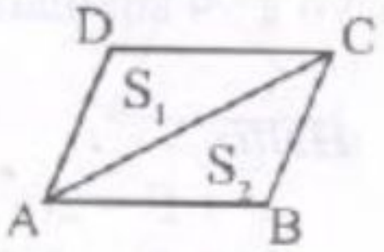


8. $\Delta AKB \sim \Delta FKD$,
$\Delta EKB \sim \Delta AKD$
$|AK|^2 = |KE| \cdot |KF|$

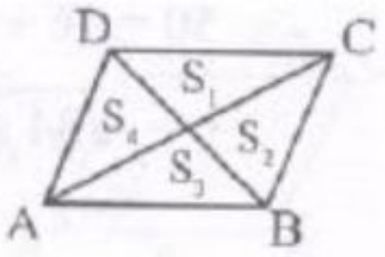


Paraleloqramda sahələr

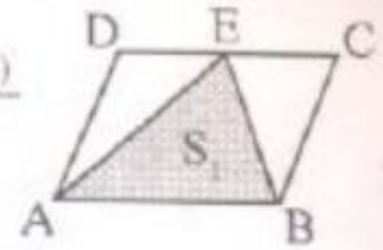
1. $S_1 = S_2 = \frac{S_{(ABCD)}}{2}$



2. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S_{(ABCD)}}{4}$

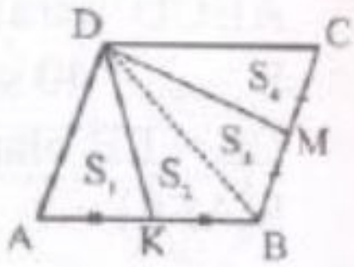


3. $E \in |DC|$, $S_1 = \frac{S_{(ABCD)}}{2}$

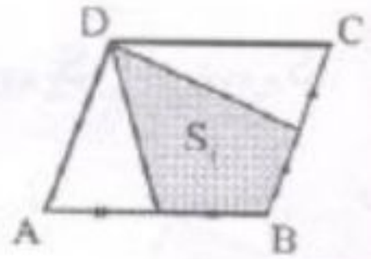


4. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S_{(ABCD)}}{4}$

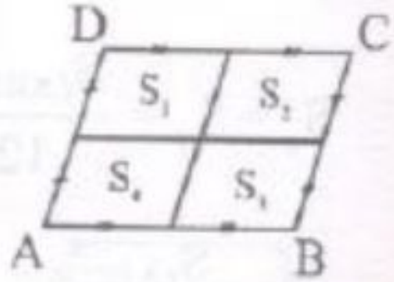
burada, AK = KB və BM = MC



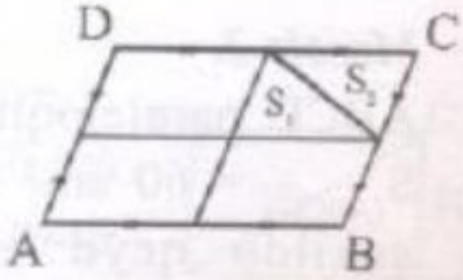
5. $S_1 = \frac{S_{(ABCD)}}{2}$



6. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S_{(ABCD)}}{4}$

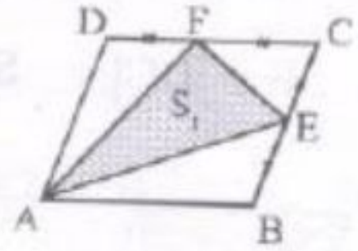


7. $S_1 = S_2 = \frac{S_{(ABCD)}}{8}$



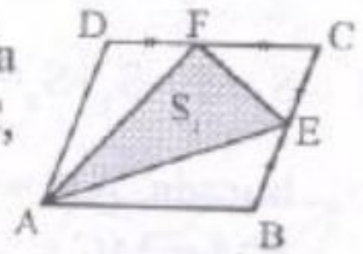
CamScanner ilə skan edilib

8. $S_1 = \frac{3}{8} S_{(ABCD)}$



Məsələ 1.

ABCD paraleloqramında $S_{(ABCD)} = 40\ sm^2$, DF = FC, CE = EB olarsa, S(AFE) = ?



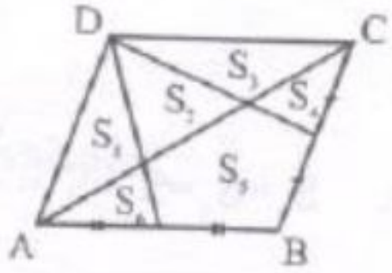
Həlli:

$$S_{\Delta AFE} = \frac{3}{8} S_{(ABCD)} = \frac{3}{8} \cdot 40 = 15\ sm^2$$

9. $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S_{(ABCD)}}{6}$

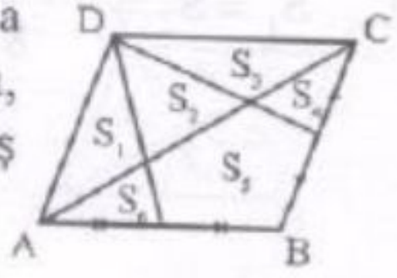
$S_4 = S_6 = \frac{S_{(ABCD)}}{12}$

$S_5 = \frac{S_{(ABCD)}}{3}$



Məsələ 2.

ABCD paraleloqramında $S_{(ABCD)} = 60\ sm^2$ olarsa, şəkildə qeyd edilmiş sahələri tapın.



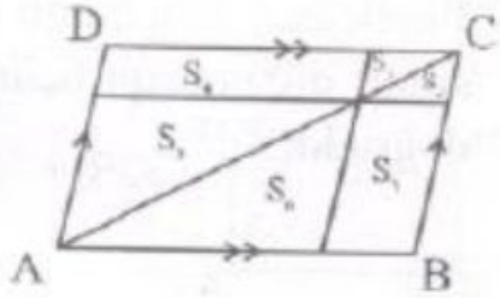
Həlli:

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{60}{6} = 10\ sm^2$$

$$S_4 = S_6 = \frac{60}{12} = 5\ sm^2$$

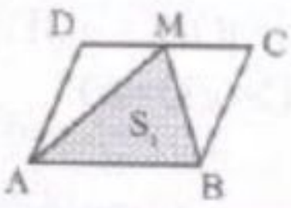
$$S_5 = \frac{60}{3} = 20\ sm^2$$

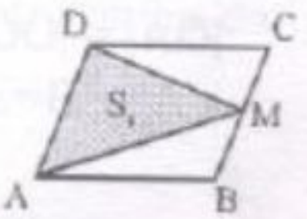
10. $S_1 = S_2$,
$S_3 = S_4$,
$S_5 = S_6$



- İxtiyari M ∈DC və ya M ∈ BC üçün,

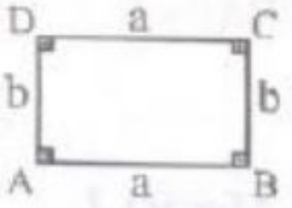
11. $S_1 = \frac{S_{(ABCD)}}{2}$





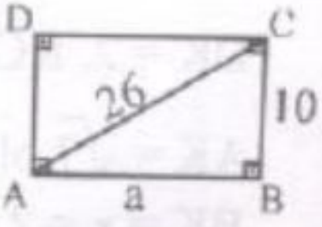
Düzbucaqlı

1. $S_{(ABCD)} = a \cdot b$
$P_{(ABCD)} = 2(a + b)$



Məsələ 1.

ABCD düzbucaqlısında AC = 26 sm, BC = 10 sm olarsa, düzbucaqlının perimetrini və sahəsini tapın.



CamScanner ilə skan edilib

Həlli:

$26^2 = a^2 + 10^2$ $\quad P = 2(a + b)$

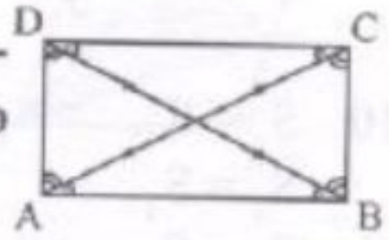
$676 - 100 = a^2$ $\quad P = 2(10 + 24)$

$576 = a^2$ $\quad P = 2 \cdot 34 = 68$ sm

$a = 24$ sm²

$S_{(ABCD)} = a \cdot b = 24 \cdot 10 = 240$ sm²

2. Paraleloqramın bütün xassələri düzbucaqlı üçün də doğrudur.

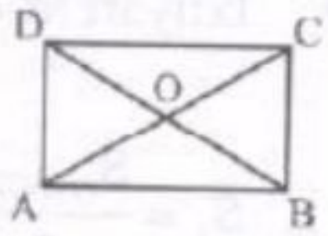


3. $|AC| = |BD|$, AD=a, DC=b olarsa,

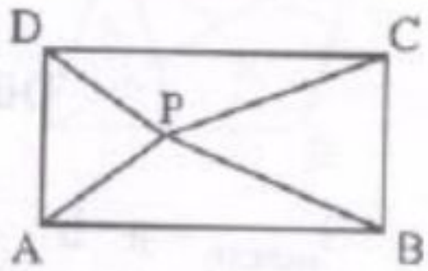
$|AC| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|OA| = |OC| = |OB| = |OD|$

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$



4. P nöqtəsi düzbucaqlının daxilində olduqda,
$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$



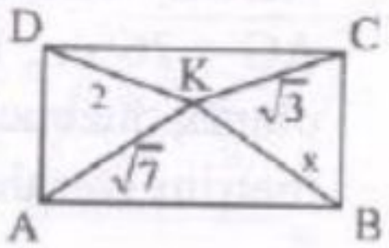
Məsələ 1.

ABCD düzbucaqlısında

$DK = 2$, $KC = \sqrt{3}$,

$AK = \sqrt{7}$ olarsa,

$BK = x = ?$



Həlli:

$\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 - x^2$

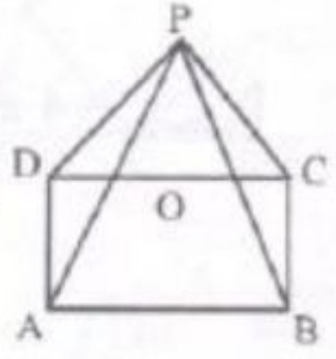
$7 + 3 = 4 + x^2$

$10 = 4 + x^2$

$x^2 = 6$

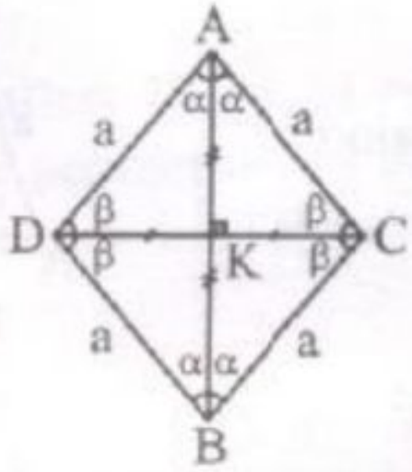
$x = \sqrt{6}$

5. P nöqtəsi düzbucaqlının xaricində olduqda,
$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$



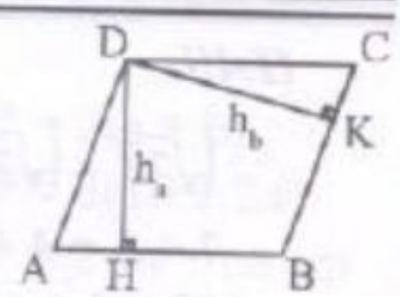
Romb

1. Paraleloqramın bütün xassələri romba da aiddir.
2. Bütün tərəflər bəraberdir
3. Diaqonallar tənböləndir.
4. Diaqonallar rombu iki bir-birinə bərabər olan bərabəryanlı üçbucaqlara ayırır.

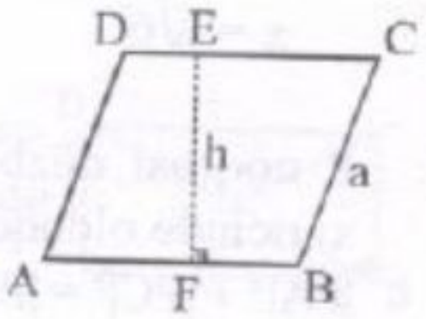


CamScanner ilə skan edilib

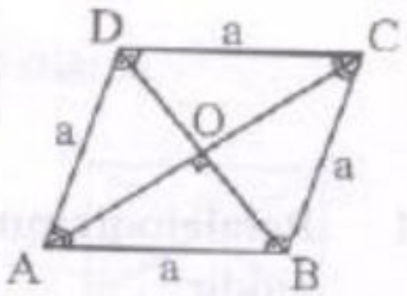
5. $h_a = h_b$



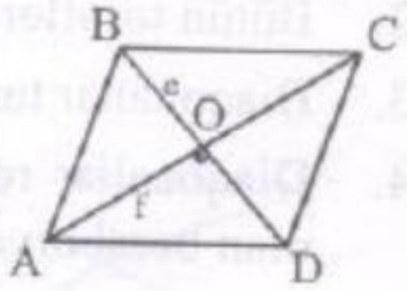
6. $S_{(ABCD)} = a \cdot h$



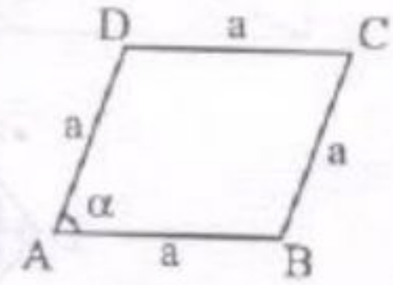
7. $P_{(ABCD)} = 4 \cdot a$



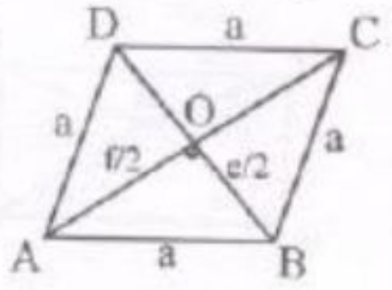
8. $|AC| \perp |BD|$, $|AC| \neq |BD|$
$\angle AOB = 90^0$



9. $S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2}$
$|OA|=|OC|$ və $|OB|=|OD|$

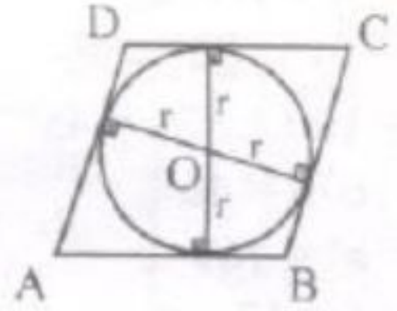


10. $S_{(ABCD)} = a^2 \sin\alpha$

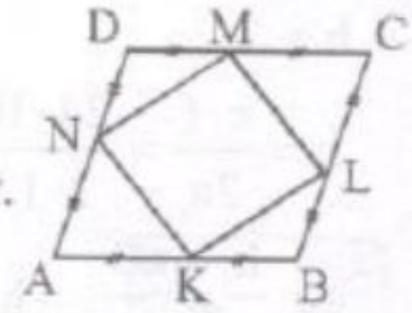


11. $e^2 + f^2 = 4a^2$

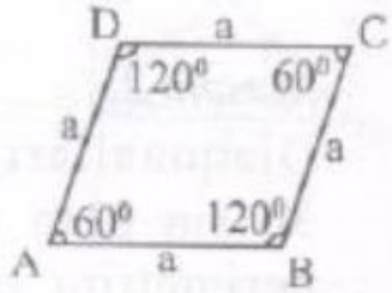
12. $h = \frac{e \cdot f}{2a}$ $h = 2r$



13. KLMN - düzbucaqlıdır.

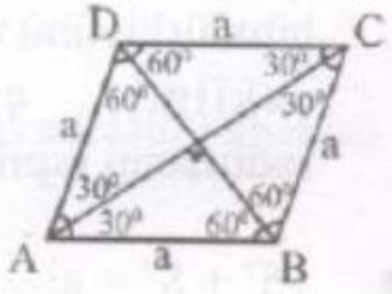


14. ABCD rombunda,
AB=BC=CD=AD= a,
A = 60^0 olarsa,



$BD = a$ və $AC = a\sqrt{3}$

$S_{(ABCD)} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Məsələ 1:
Diaqonalları 10 və 24 sm olan rombun sahəsini perimetrini və daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

Həlli:

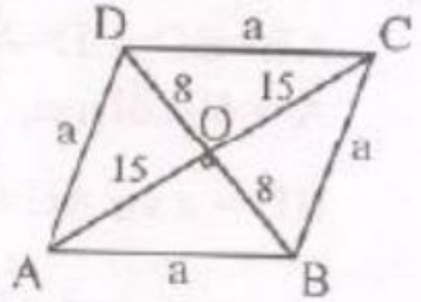
$S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120\ sm^2$

CamScanner ilə skan edilib

- $e^2 + f^2 = 4a^2$
  $10^2 + 24^2 = 4a^2$
  $100 + 576 = 4a^2$
  $676 = 4a^2$
  $a^2 = 169$
  $a = 13$
- $P = 4a$
  $P = 4 \cdot 13$
  $P = 52$ sm
- $h = 2r$
- $h = \frac{e \cdot f}{2a} = \frac{24 \cdot 10}{2 \cdot 13} = \frac{120}{13}$; $h = \frac{120}{13}$
- $r = \frac{h}{2} = \frac{60}{13}$; $h = \frac{120}{13}$

Məsələ 2.

Diaqonalları 16 və 30 sm olan rombun perimetrini sahəsini, hündürlüyünü və daxilə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

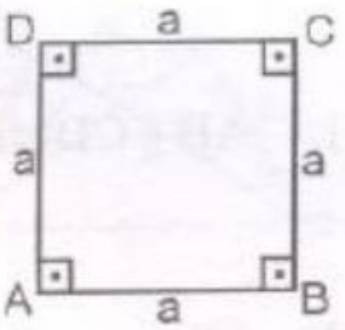


- $15^2 + 8^2 = a^2$
  $a = 17$ sm
- $P = 4a$
  $P = 4 \cdot 17$
  $P = 68$ sm
- $S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240$ sm^2
- $S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot h$; $\frac{30 \cdot 16}{2} = 17 \cdot h$;

  $h = \frac{240}{17 \cdot 2} = 2r$; $r = \frac{120}{17}$

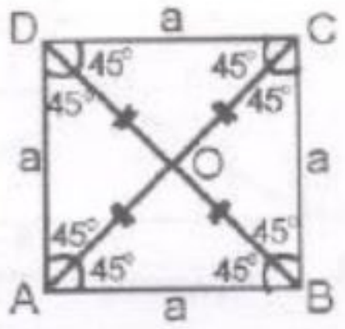
Kvadrat

1. Paraleloqramın, rombun və düzbucaqlının bütün xassələri kvadrata da aiddir.



   $S_{(ABCD)} = a^2$
   $P_{(ABCD)} = 4a$

2. $|AC| = |BD| = a\sqrt{2} = e = f$



   $S_{(ABCD)} = \frac{e^2}{2}$

   burada, e və f - diaqonalların uzunluğudur.

Məsələ:

Diaqonalı $\sqrt{6}$ sm olan kvadratın sahəsini və perimetrini tapın.

Həlli:

$a^2 + a^2 = (\sqrt{6})^2 \Rightarrow 2a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{3}$

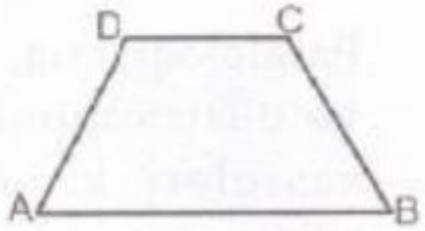
$P = 4a = 4\sqrt{3}$ sm

$S = \frac{e^2}{2} = \frac{(\sqrt{6})^2}{2} = \frac{6}{2} = 3$ sm

CamScanner ilə skan edilib

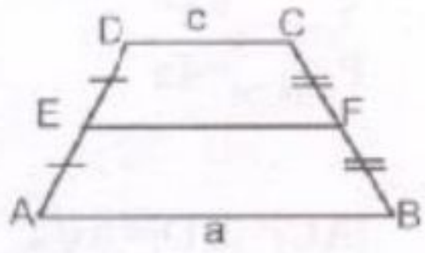
Trapesiya

1. AB || CD-dir.

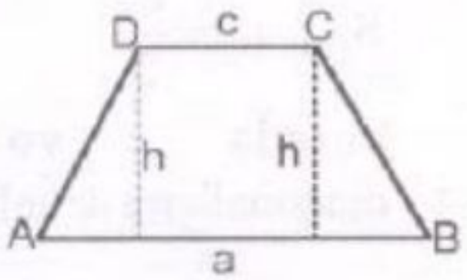


2. EF - orta xətdir.

$$|EF| = \frac{a+c}{2}$$

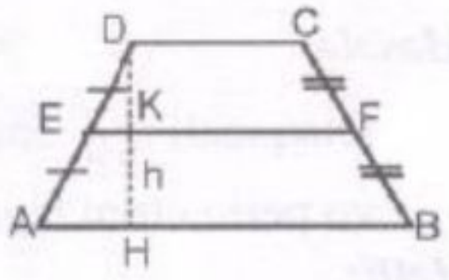


3. $S_{(ABCD)} = \frac{a+c}{2} \cdot h$

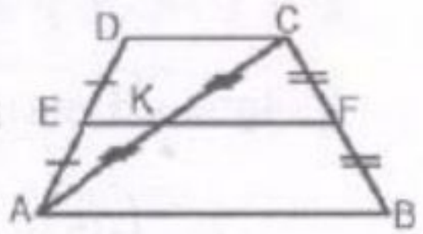


4. $S_{(ABCD)} = |EF| \cdot h$

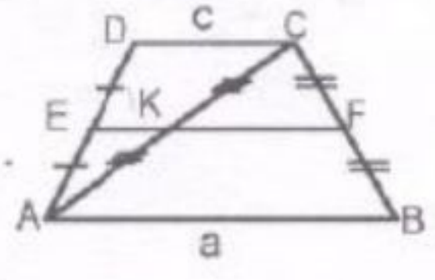
$$|DK| = |KH| = \frac{h}{2}$$



5. Orta xətt dioqanalları yarı bölür. |AK|=|KC|



6. $|EK| = \frac{c}{2}; |KF| = \frac{a}{2}$

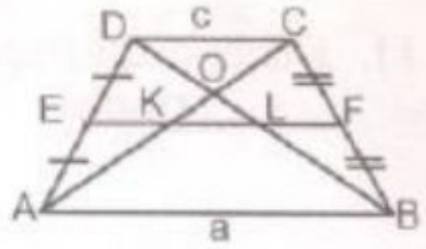


7. |AK|=|KC|, |LB|=|LD|

$$|EK| = |LF| = \frac{c}{2}$$

$$|EL| = |KF| = \frac{a}{2}$$

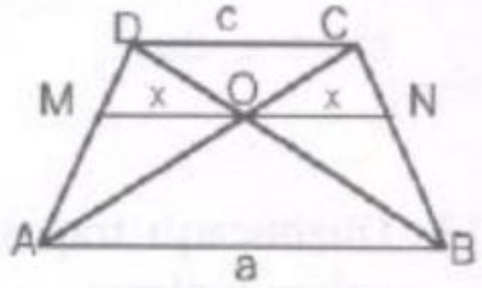
$$|KL| = \frac{a-c}{2}$$



8. MN || AB -dir.

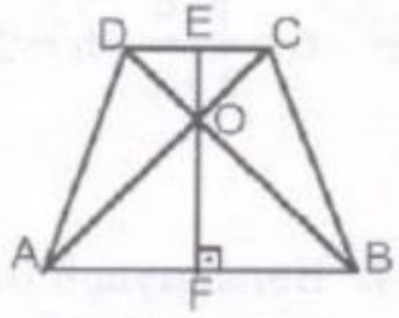
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \text{ və}$$

$$x = \frac{a \cdot c}{a+c};\ |MN| = \frac{2a \cdot c}{a+c}$$



9. $|OE| = \frac{c \cdot h}{a+c}$;

$$|OF| = \frac{a \cdot h}{a+c}$$



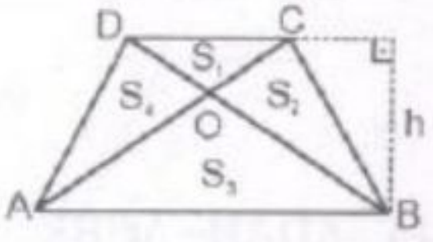
10. İxtiyari trapesiyada

$S_{(ABD)} = S_{(ABC)}$

$S_3 + S_4 = S_1 + S_2$

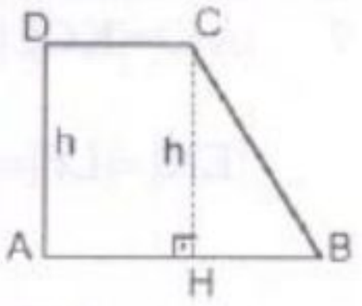
$S_2 = S_4 = \sqrt{S_1 \cdot S_3}$

$S_{(ABCD)} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}\right)^2$

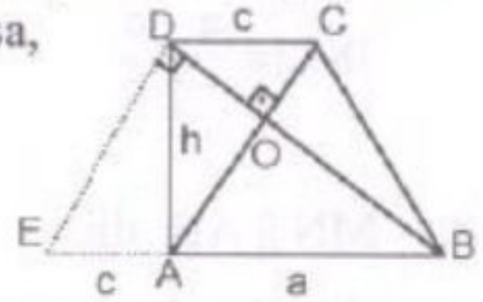


CamScanner ilə skan edilib

11. Düzbucaqlı trapesiya
$\angle A=\angle D=90^0$



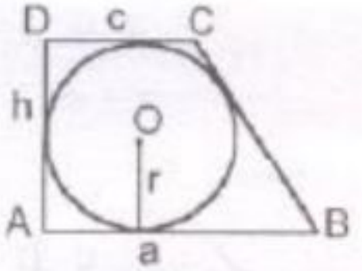
12. Düzbucaqlı trapesiyada diaqonallar perpendikulyar olarsa,
$|ED| \perp |BD|$
$h^2 = a \cdot c$ -dir.



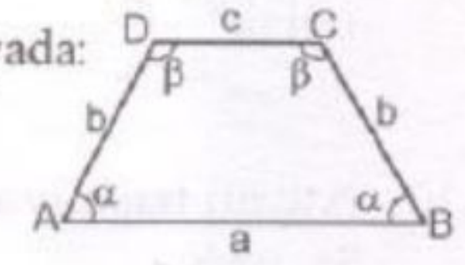
13. Düzbucaqlı trapesiyanın daxilində çevrə çəkmək olarsa,

$$a = \frac{c \cdot r}{c - r};\ c = \frac{a \cdot r}{a - r}$$

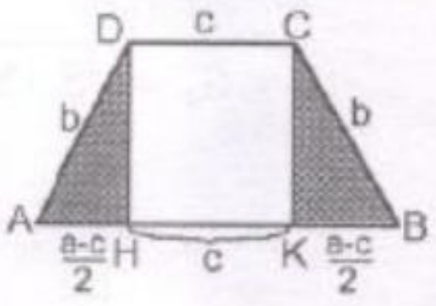
$$r = \frac{a \cdot c}{a + c};\ h = 2r$$



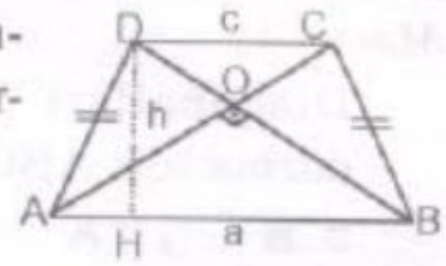
14. Bərabəryanlı trapesiyada:
$|AD|=|BC|=b$
$\angle A=\angle B=\alpha$



15. $\Delta DAH=\Delta CBK$

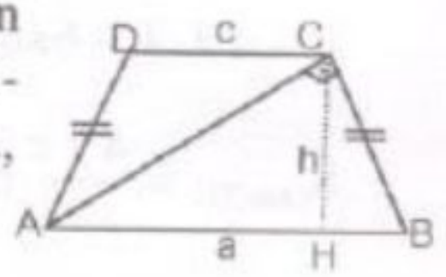


16. Diaqonalları perpendikulyar olan bərabəryanlı trapesiya



$$h = \frac{a+c}{2}\text{-dir.}$$

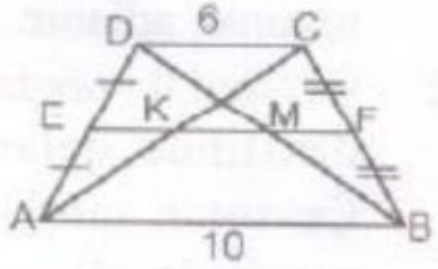
17. Diaqonallar yan tərəflərə perpendikulyar olarsa,



$$h = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}$$

Məsələ 1:
DC= c =6, AB = a =10 olarsa, EF=?, KM=?, EK=?

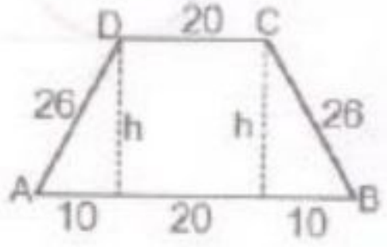
$$EF = \frac{a+c}{2} = \frac{10+6}{2} = 8$$



$$KM = \frac{a-c}{2} = \frac{10-6}{2} = 2$$

$$EK = \frac{c}{2} = \frac{6}{2} = 3;\ KF = \frac{a}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Məsələ 2:
Şəklə əsasən, $S_{(ABCD)}$=?



Həlli:
$26^2 = 10^2 + h^2 \Rightarrow h=24$

$$S_{(ABCD)} = \frac{a+c}{2}h = \frac{20+40}{2} \cdot 24 = 720\,sm^2$$

CamScanner ilə skan edilib

Məsələ 3:

Diaqonalları perpendikulyar olan düzbucaqlı ABCD trapesiyasında, DC=4 sm , AB = $S_{(ABCD)}$=39 sm

Həlli:

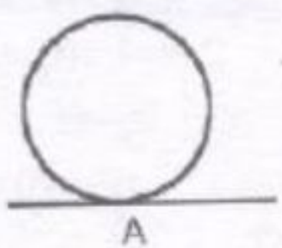
$h^2 = ac$

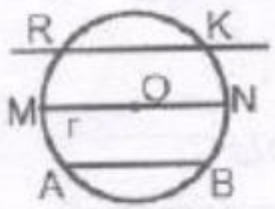
$h = \sqrt{9 \cdot 4} = 6\,sm$

$$S_{(ABCD)} = \frac{a+c}{2}h = \frac{9+4}{2} \cdot 6 = 39\,sm^2$$

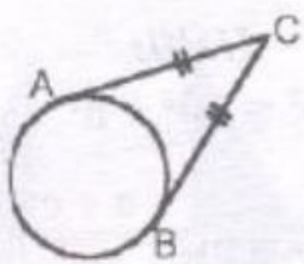
Çevrə

1. Çevrə ilə bir ortaq nöqtəsi olan düz xətt toxunan adlanır.
2. Çevrəni iki nöqtədə kəsən düz xəttin çevrə daxilində qalan hissəsi vətər adlanır. Çevrənin mərkəzindən keçən vətər isə çevrənin diametri adlanır. Çevrənin mərkəzindən çevrə xəttinə qədər olan məsafə çevrənin radiusu adlanır.



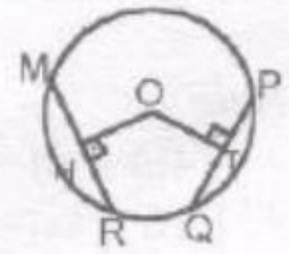


3. |AC|=|BC|

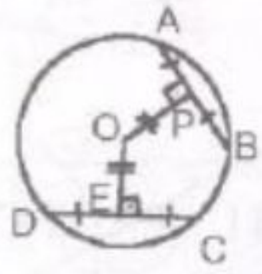


4. |RF| diametr, |RF|⊥|AC| olarsa, |AB|=|BC|

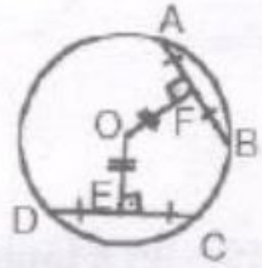
5. |OH|=|OT| ⇒ |MR|=|PQ|



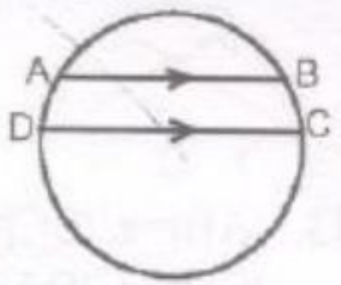
6. Vətərlərin orta perpendikulyarı çevrənin mərkəzindən keçər.



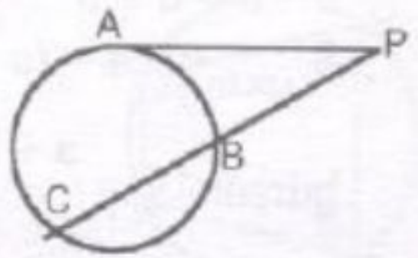
7. |OE|=|OF| ⇒ $\hat{AB} = \hat{DC}$



8. AB || DC ⇒ $\hat{AD} = \hat{BC}$

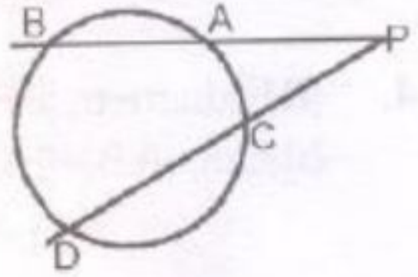


9. $|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$

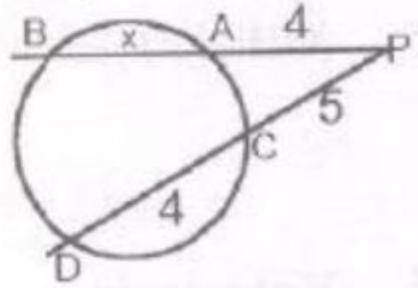


CamScanner ilə skan edilib

10. $|PA|\cdot|PB| = |PC|\cdot|PD|$



Məsələ 1: **Şəklə əsasən x-i tapın.**



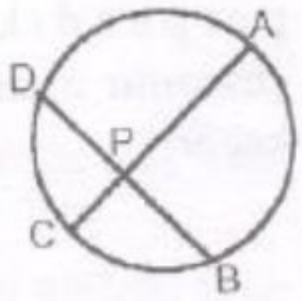
Həlli:

$4(4 + x) = 5(5 + 4)$

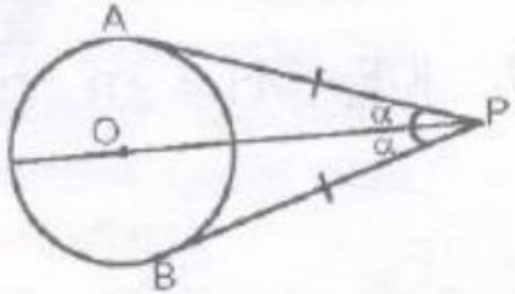
$16 + 4x = 45$

$x = 29/4$

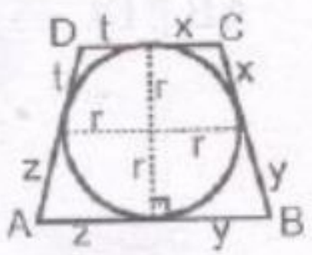
11. $|PA|\cdot|PC| = |PD|\cdot|PB|$



12. $|PO|$ tənböləndir.



13. $|AB|=a$, $|BC|=b$,
$|CD|=c$, $|DA|=d \Rightarrow$



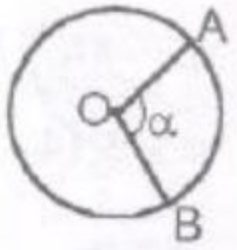
$a + c = d + b$

$S_{(ABCD)} = P\cdot r = (a + c)r = (b + d)r$

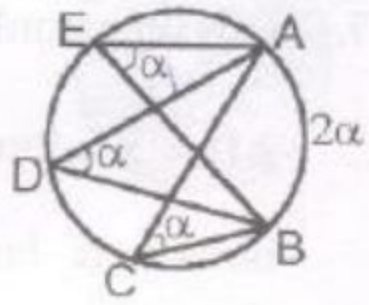
burada, $P = \dfrac{a+b+c+d}{2} = a+c=b+d$

Cevrədə bucaqlar

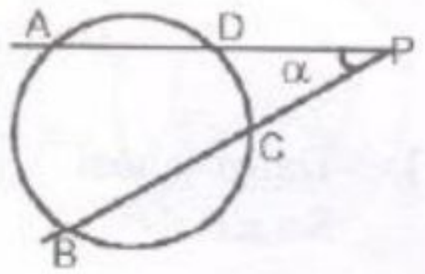
1. Mərkəzi bucaq uyğun qövsün ölçüsünə bərabərdir. $\alpha = \overset{\frown}{AB}$



2. Çevrə daxilinə çəkilən bucaq, söykəndiyi qövsə uyğun mərkəzi bucağın yarısına bərabərdir.



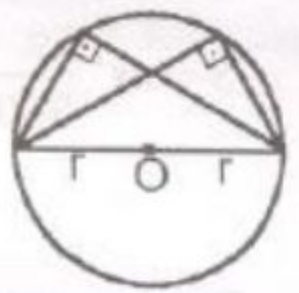
3. $\alpha = \dfrac{|\hat{AB} - \hat{DC}|}{2}$



Məsələ 1:

$\hat{AB} = 80^0$, $\hat{DC} = 20^0$ olarsa, $\alpha = \dfrac{80^0 - 20^0}{2} = 30^0$

4. Diametrə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqlar 90^0-dir.

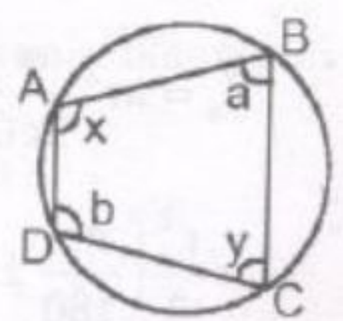


5. ABCD - çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlıdırsa,

$\angle a + \angle b = 180^0$

$\angle x + \angle y = 180^0$

$\angle x + \angle y = \angle a + \angle b$



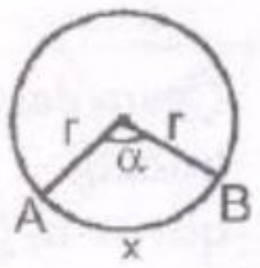
CamScanner ilə skan edilib

6. Çevrənin uzunluğu

$\ell = 2\pi r, \quad \pi \approx \frac{22}{7}$ və ya

$\pi \approx 3{,}14$

7. Qövsün uzunluğu

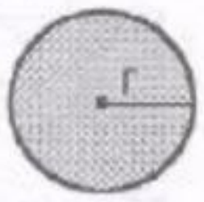


$AB = x = 2\pi r \frac{\alpha}{360}$

burada, α -bucağın dərəcə ölçüsüdür.

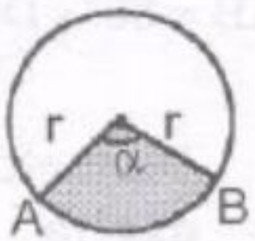
Dairənin sahəsi

1. Dairə sahəsi



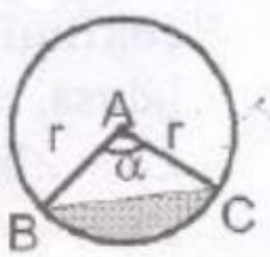
$S = \pi r^2$

2. Dairə sektorunun sahəsi



$S = \pi r^2 \frac{\alpha}{360}$

3. Dairə seqmentinin sahəsi



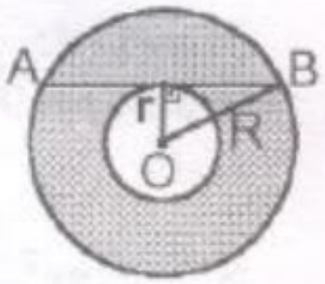
$S_s = \pi r^2 \frac{\alpha}{360} \pm \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha =$

$= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} \pm \sin\alpha\right)$

4. Dairə halqası

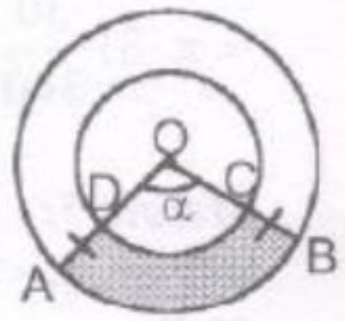
$S_s = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

5. $AB = a$



$S_s = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$

6. $OC = r$, $OB = R$



$S_s = \pi R^2 \frac{\alpha}{360} - \pi r^2 \frac{\alpha}{180} =$

$= \frac{\pi\alpha}{360}\left(R^2 - r^2\right)$

Məsələ 1:

Radiusu $\sqrt{2}$ sm olan dairənin sahəsini tapın.

Həlli: $S = \pi r^2 = \pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi$

Məsələ 2:

Sahəsi 169π sm² olan dairənin diametrini tapın.

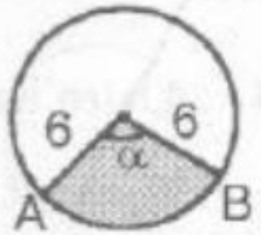
Həlli: $\pi r^2 = 169\pi \Rightarrow r = 13$

$d = 2r = 26$

CamScanner ilə skan edilib

Məsələ 3:

r= 6sm, $\alpha = 60^0$, $S_{Seq.}$=?

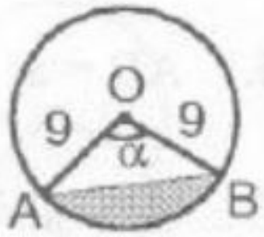


Həlli:

$$S_{Seq.} = \pi r^2 \frac{\alpha}{360} = \pi r^2 \frac{60}{360} = 6\pi$$

Məsələ 4:

a=30°, r = 9sm, $S_{Seq.}$=?



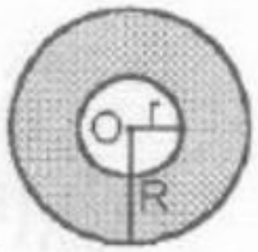
Həlli:

$$S_{Seq.} = \pi r^2 \frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha =$$

$$= \pi \cdot 81 \frac{30}{360} - \frac{1}{2} \cdot 81 \cdot \sin 30 = \frac{81\pi - 243}{12}$$

Məsələ 5:

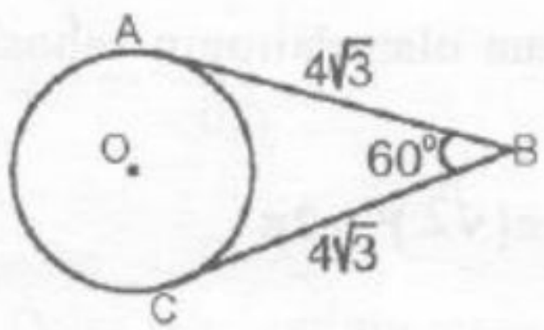
r=3 sm, R=5 sm, S_s=?



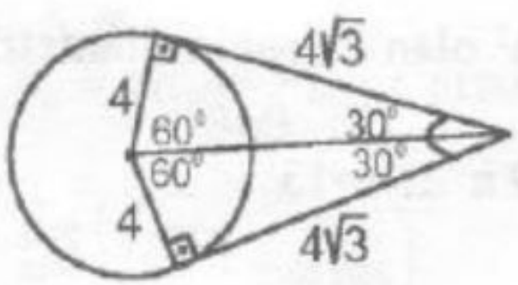
Həlli:

$S_s = \pi(R^2 - r^2) = \pi(5^2 - 3^2) = 16\pi$

Məsələ 6:

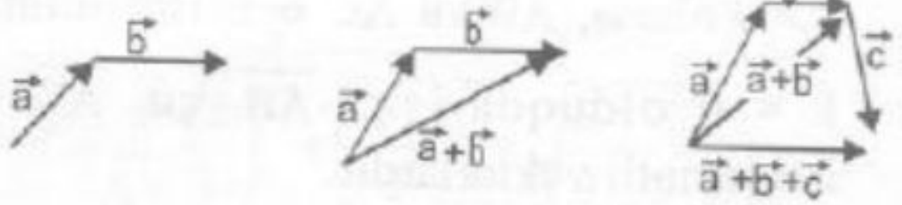


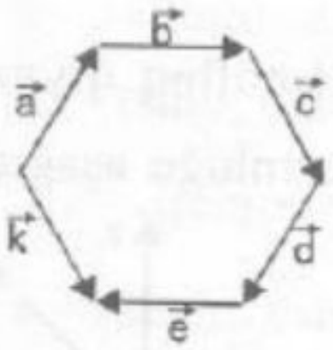
r=?



r=4 sm

Vektorlar





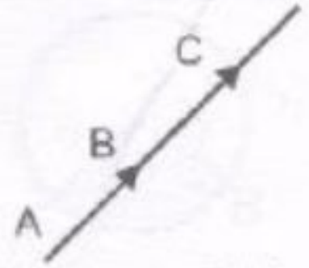
$$\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

1. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
2. $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = (\vec{C} + \vec{A}) + \vec{B}$
3. $\vec{A} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{A} = \vec{A}$
4. $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$
5. $a \cdot (b\vec{A}) = b \cdot (a\vec{A}) = (a \cdot b)\vec{A}$
6. $(a + b)\vec{A} = a\vec{A} + b\vec{A}$
7. $a(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$

CamScanner ilə skan edilib

➲ Vektorun bir ədəd ilə hasili

$\overline{AC} = k \cdot \overline{AB}$ $\quad |\overline{AC}| = |k| \cdot |\overline{AB}|$



$k > 0$ olarsa, $\overline{AB}$ və $\overline{AC}$ eyni istiqamətlidir

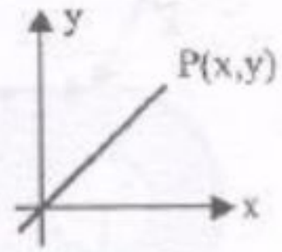
$k < 0$ olduqda isə, $\overline{AB}$ və $\overline{AC}$ əks istiqamətli vektorlardır.

$\overline{AB} = k \cdot \overline{CD}$, $\quad \overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

➲ **Vektorun uzunluğu** (mütləq qiyməti)

$\vec{P}=(x;y)$ vektorunun uzunluğu aşağıdakı kimi tapılır:

$|\vec{P}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Məsələ 1.

$\vec{P}\,(5,\ 12)$ isə, $\vec{P}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

Həlli:

$|P| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

➲ **Vahid vektor**

Uzunluğu bir olan vektora vahid vektor deyilir.

$\vec{P} = (x;\ y)$, $|\vec{P}| = 1$ olarsa, $\vec{P}$ vektoru vahid vektor adlanır.

$|P| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

Məsələ 2.

$\vec{P} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$ isə,

$|\vec{P}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{7}{9}} = 1$

$\vec{P}$ - vektoru vahid vektordur.

$\vec{k} = (\sin\alpha,\ \cos\alpha)$

$|\vec{k}| = \sqrt{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2} = 1$ vahid vektor.

$\vec{k}$ - vektoru vahid vektordur.

➲ $\vec{A} = (a;\ b)$, $\vec{B} = (c;\ d)$

$\vec{A} + \vec{B} = (a+c;\ b+d)$; $\vec{A} - \vec{B} = (a-c;\ b-d)$

$\vec{B} = k\vec{A}$, $\quad k \in R$ və $k \neq 0$

$\vec{B} = k\vec{A} = (ka;\ kb)$

Məsələ 3.

$\vec{A}\,(3;\ 4)$ və $\vec{B}\,(2;\ 5)$

$\vec{A} + \vec{B} = (3+2;\ 4+5) = (5;\ 9)$

$\vec{A} - \vec{B} = (3\text{-}2;\ 4\text{-}5) = (1;\ \text{-}1)$

$3\vec{A} + 4\vec{B} = 3(3;\ 4) + 4(2;\ 5) = (9;\ 12) + (8;\ 20)$

$3\vec{A} + 4\vec{B} = (9+8;\ 12+20) = (17;\ 32)$

CamScanner ilə skan edilib

Məsələ 4.

$(3; 2)$ və $\bar{b}\,(4; 6)$ vektorlarının cəminin uzunluğunu tapın.

Həlli: $\bar{a} + \bar{b} = (3 + 4; 2 + 6) = (7; 8)$

$$\left|\bar{a} + \bar{b}\right| = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113}$$

Məsələ 4.

$\bar{a}\,(8; 6)$ və $\bar{b}\,(4; 3)$ isə $|\bar{a} - \bar{b}| = ?$

Həlli: $\bar{a} - \bar{b} = (8\text{-}4; 6\text{-}3) = (4; 3)$

$$\left|\bar{a} - \bar{b}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

- $\vec{A} = (a; b)$, $\vec{B} = (c; d)$ və $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ olarsa,

$\vec{B} = k\vec{A}$ və $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ olur.

Məsələ 5.

$\bar{a}\,(x; -3)$ və $\bar{b}\,(2; 6)$ və $\bar{a} \,//\, \bar{b}$ isə, $x = ?$

Həlli: $\frac{x}{2} = \frac{-3}{6}$; $\quad x = -1$

➲ Müstəvi üzərində vektorların skalyar hasili

$\vec{A} = (a; b)$, $\quad \vec{B} = (c; d)$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = a \cdot c + b \cdot d$

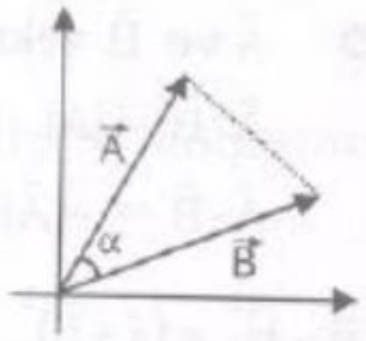
➲ Sklayar hasilin xassələri

$\vec{A} = (a; b)$, $\quad \vec{B} = (c; d)$ $\quad m; n \in R$ üçün

- $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = a^2 + b^2$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- $\left(m\vec{A}\right) \cdot \left(n\vec{B}\right) = (m \cdot n) \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$
- $\left(m\vec{A}\right) \cdot \vec{B} = m \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = \vec{A} \cdot \left(m\vec{B}\right)$

➲ $0 < \alpha < 180^\circ$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| \cdot |B| \cdot \cos\alpha$



$$\cos\alpha = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}$$

Məsələ 6.

$\bar{a}\,(-2; 0)$ və $\bar{b}\,(-\sqrt{3}\,; 3)$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

Həlli:

$$\cos\alpha = \frac{-2 \cdot \left(-\sqrt{3}\right) + 0{,}3}{\sqrt{2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ isə, $\alpha = 60^\circ$

CamScanner ilə skan edilib

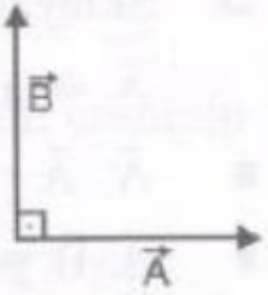
➲ $\vec{A} \perp \vec{B}$ olarsa $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos 90^\circ$

Perpendikulyarlıq şərti

$\vec{A}(a; b), \quad \vec{B}(c; d)$

$ac + bd = 0$



➲ $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ olarsa, $\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| \cdot |B| \cdot \cos 0^\circ$

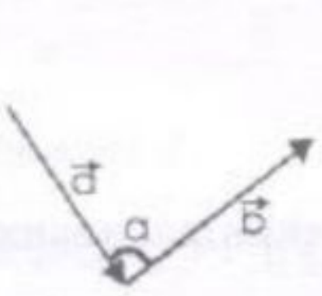
$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$

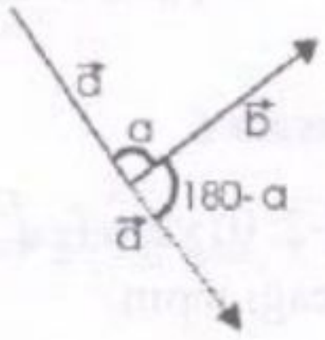
➲ $\vec{A}$ və $\vec{B}$ vektorları əks istiqamətli olarsa,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| \cdot |B| \cdot \cos 180^\circ$

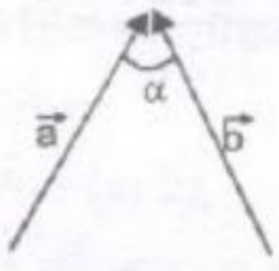
$\vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$





$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(180^\circ - \alpha)$; $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$

Fəzada vektorlar

➲ İki nöqtə arasındakı məsafə. Fəzada $A(x_1,y_1,z_1)$ və $B(x_2,y_2,z_2)$ nöqtələri verilmiş olsun. Onda

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1 \pm y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

$\vec{u} = (a; b; c)$ olarsa, $|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Məsələ 1.

A(1; 4; -3) və B(-3; 1; 9) nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

Həlli:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+3)^2+(4\pm1)^2+(\pm3\pm9)^2}$$

$$= \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{169} = 13$$

Məsələ 2.

$\vec{a}$ (-3; 4; -12) vektorun uzunluğunu tapın.

Həlli:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2+4^2+(-12)^2} = \sqrt{9+16+144} =$$

$$= \sqrt{169} = 13$$

CamScanner ilə skan edilib

➲ Vektorların toplanması və çıxılması

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ və $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$

Məsələ 3.

$\vec{a}\,(3; 2x-1; y+1)$ və $\vec{b}\,(z+3; 4; 3)$

$\vec{a} = 2\vec{b}$ isə, $x + y + z = ?$

Həlli:

$2b = 2(z+3; 4; 3) = (2z + 6; 8; 6)$

$\vec{a} = 2\vec{b} \Rightarrow (3; 2x-1; y+1) = (2z+6; 8; 6)$

$2z + 6 = 3 \qquad 2x - 1 = 8 \qquad y + 1 = 6$

$$z = -\frac{3}{2}; \quad x = \frac{9}{2}; \quad y = 5$$

$$x + y + z = \frac{9}{2} + 5 - \frac{3}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

➲ Vektor ilə ədədin hasili

$\vec{u} = (a; b; c)$ vektoru ilə bir k ədədinin hasili $k \cdot \vec{u} = (ka, kb, kc)$ olar.

$k > 0$ olarsa, $k \cdot \vec{u}$ ilə $\vec{u}$ eyni istiqamətli olar.

$k < 0$ olarsa, $k \cdot \vec{u}$ ilə $\vec{u}$ əks istiqamətli olar.

$|k \cdot \vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$

➲ Vektorların skalyar hasili

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_2)$ və $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$|\vec{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

➲ $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{C} = (x_3, y_3, z_3)$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$\vec{B} \cdot \vec{A} = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$\vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

$\vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) \neq (\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}$

➲ İki vektor arasındakı bucaq

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\alpha \qquad \cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Məsələ 4.

$\vec{a}\,(1; 1; \sqrt{2})$ və $\vec{b}\,(1; 1; 0)$ vektorlar arasındakı bucağı tapın.

CamScanner ilə skan edilib

Həlli:

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot1+1\cdot1+\sqrt{2}\cdot0}{\sqrt{1^2+1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}$$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olarsa, $\alpha = 45^\circ$

* İki vektorun perpendikulyarlıq əlaməti:

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ və $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Əgər $\vec{u} \perp \vec{v}$ olarsa, $\cos\alpha = \cos90^\circ = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos90^\circ \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot0 \Rightarrow$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

* İki vektorun paralellik əlaməti:

$\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (p, q, r)$

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ olarsa, $\vec{u} = k\vec{v}$

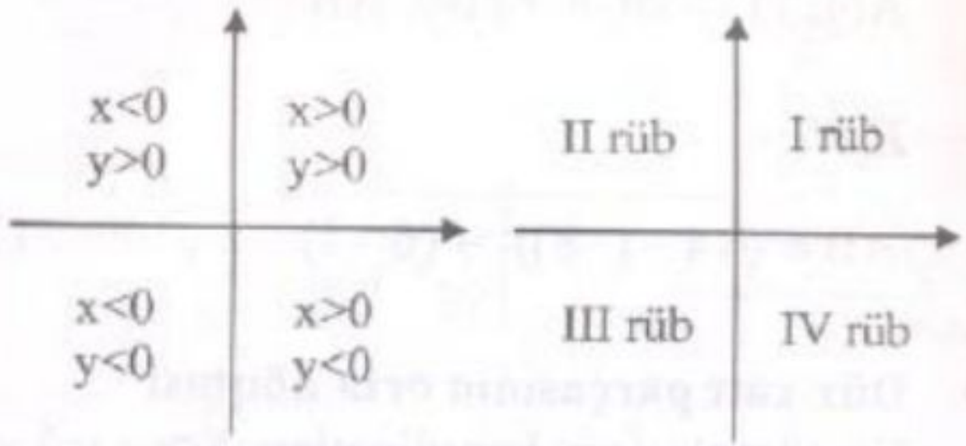
$(a, b, c) = k(p, q, r) = (kp, kq, kr)$

$$\left.\begin{array}{l} a = kp \\ b = kp \\ c = kr \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a}{p} = k \\ \frac{b}{q} = k \\ \frac{c}{r} = k \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

Məsələ 5.

$\vec{a}$ (-3; 6; 9) və $\vec{b}$ (2; -4; m) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ isə, m = ?

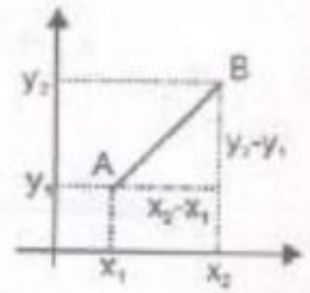
Həlli: $\frac{\pm3}{2} = \frac{6}{-4} = \frac{\pm9}{m}$; $\frac{6}{-4} = \frac{-9}{m}$; m=6



➲ **İki nöqtə arasındakı məsafə:**

$A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələri arasındakı məsafə aşağıdakı kimidir.

$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$



$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Məsələ 1.

A(-1; 7) və B(3; 4) nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

Həlli:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3-(-1))^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

AB = 5 sm

CamScanner ilə skan edilib

Məsələ 2.

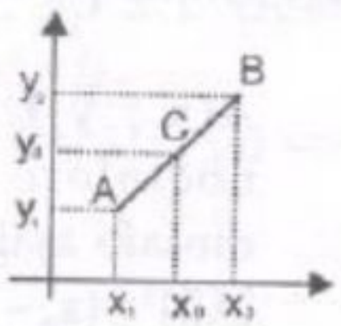
A(4; 1) və B(-8; 6) isə, AB=?

Həlli:

$$AB = \sqrt{(4-(-8))^2 + (6-1)^2} = \sqrt{169} = 13$$

➲ **Düx xətt parçasının orta nöqtəsi**

Uc nöqtələrinin koordinatları $A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ olan $|AB|$ düz xətt parçasının orta nöqtəsi $C(x_0; y_0)$ olarsa,



$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$C(x_0; y_0) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

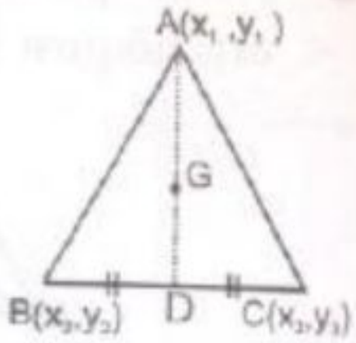
➲ **Üçbucağın sahəsi və ağırlıq mərkəzi**

$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ və $C(x_3; y_3)$ ΔABC-nin təpə nöqtələri, G üçbucağın ağırlıq mərkəzi, D isə BC tərəfinin orta nöqtəsi olsun. Onda,

$$D(x_0; y_0) = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}; \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_3y_2 + x_2y_1)]$$

Məsələ 3.

Təpə nöqtələri A(7; 2), B(1,3), C(4; 1) olan üçbucağın sahəsini tapın.

Həlli:

A(7; 2); B(1; 3); C(4; 1)

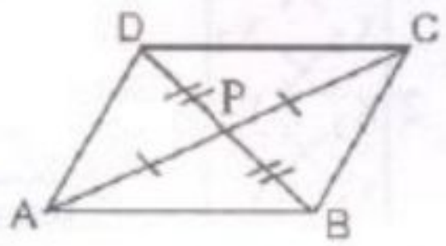
$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(21 + 1 + 8 - 7 - 12 - 2) = \frac{9}{2}$$

$$S_{(ABC)} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ sm}^2$$

CamScanner ilə skan edilib

➲ ABCD paraleloqramdır. |AC| və |BD| -nin orta nöqtəsi P-dir. $P(x_0; y_0)$ olarsa,



$A(x_4; y_4)$, $B(x_3; y_3)$, $C(x_2; y_2)$, $D(x_1; y_1)$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2} \Rightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2} \Rightarrow y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

➲ **İki nöqtəsi mə'lum olan düz xəttin bucaq əmsalı:** $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, m -bucaq əmsalıdır.

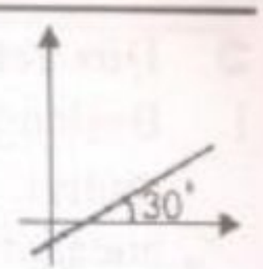
Məsələ 1.

A(2; 4) və B(-4; 8) nöqtələrindən keçən düz xəttin bucaq əmsalını tapın.

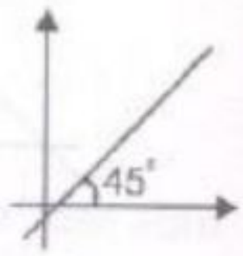
Həlli:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{-4 - 2} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

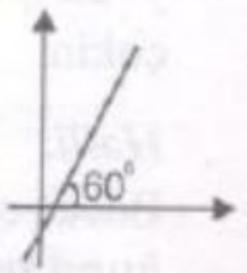
➲ Şəkildə göstərilən düz xəttin bucaq əmsalı ,



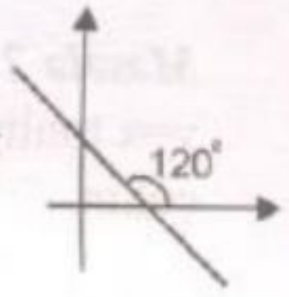
☞ $m = tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$



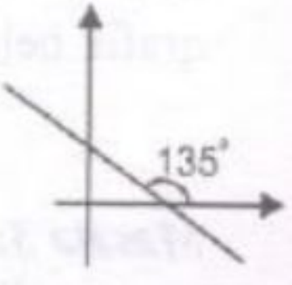
☞ Bucaq əmsalı $m=tg45^0=1$



☞ Bucaq əmsalı $m=tg60^0=\sqrt{3}$



☞ Bucaq əmsalı $m=tg120^0=-\sqrt{3}$

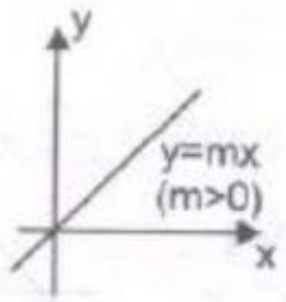


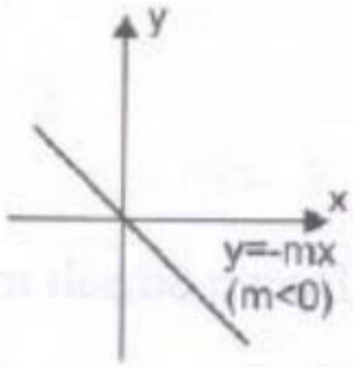
☞ Bucaq əmsalı $m=tg135^0=-1$

CamScanner ilə skan edilib

➲ Düz xətt tənlikləri

1. Başlanğıc nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyi: $y = mx$, burada, $m = tg\alpha$, α -meyl bucağıdır.



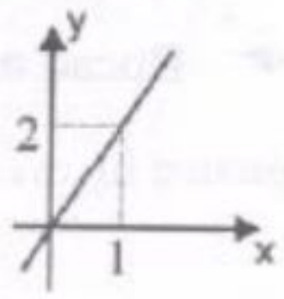


Məsələ 1:

$y=2x$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin qrafikini çəkin.

Həlli:

Bucaq əmsalı $m=2>0$ olduğundan, qrafik yandakı kimi olar.

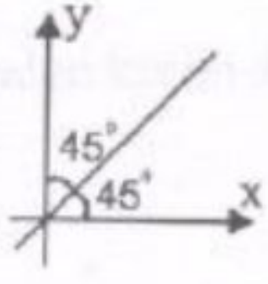


Məsələ 2:

$y=x$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin qrafikini çəkin.

Həlli:

Burada $m=1$ olduğundan, qrafik belə olar.

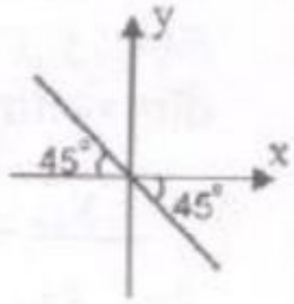


Məsələ 3:

$y=-x$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin qrafikini çəkin.

Həlli:

$y=-x$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin bucaq əmsalı $m=-1<0$ olduğundan, qrafiki yandakı kimi olacaqdir.



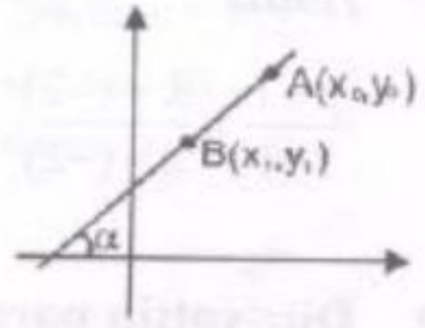
➲ Bir nöqtəsi və bucaq əmsalı mə'lum olan düz xəttin tənliyi:

$A(x_0; y_0)$ və bucaq əmsalı m olan düz xəttin tənliyi

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m_{AB} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

$$y - y_1 = m_{AB}(x - x_1)$$



Məsələ 1:

$A(2; -3)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı 2 olan düz xəttin tənliyini tapın.

Həlli:

$A(2; -3)$ və $m=2$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - (-3) = 2(x - 2)$

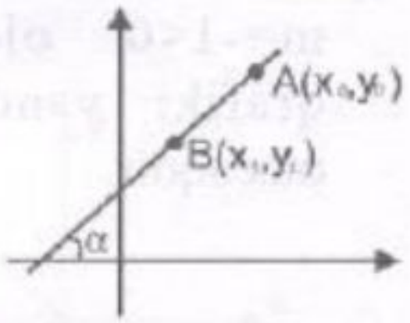
$y = 2x - 7$

CamScanner ilə skan edilib

➲ **İki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyi:**

$A(x_0; y_0)$ və $B(x_1; y_1)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$\frac{y - y_1}{y_0 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$



$$m = tg\alpha = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

Məsələ 1:

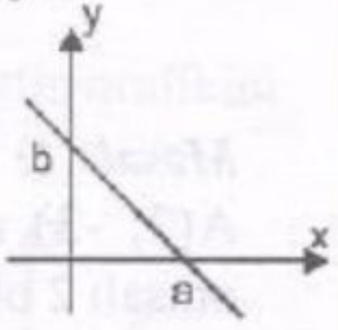
A(2; 3) və B(-2; 1) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-(-2)}{2-(-2)} \Rightarrow 2y - x - 4 = 0$$

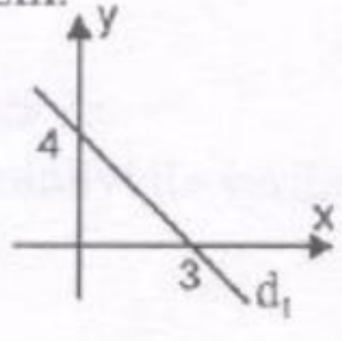
➲ **Düz xəttin parçalarla tənliyi:**

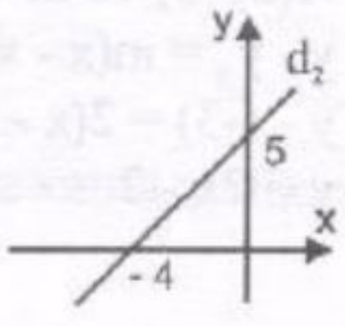
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Məsələ 1:

Şəkildə verilmiş düz xəttlərin tənliyini yazın.



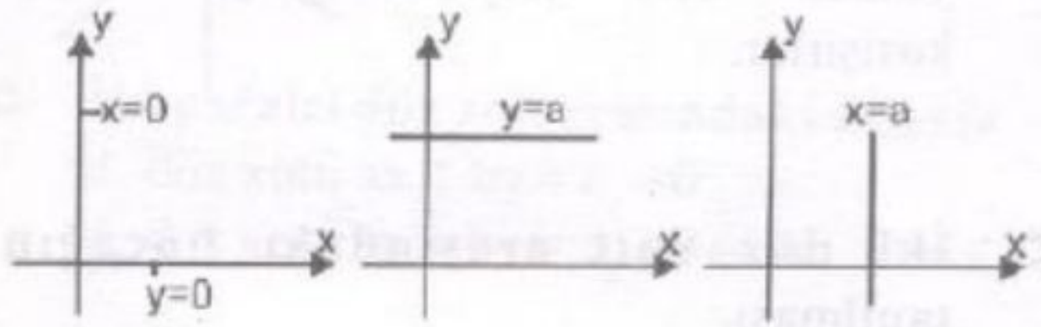


Həlli:

$$d_1: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \qquad 4x + 3y = 12$$

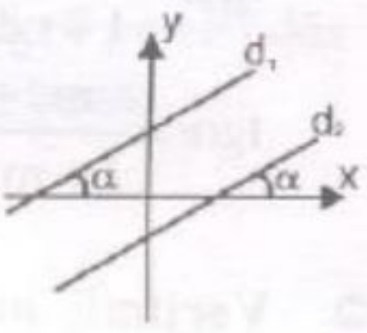
$$d_2: \frac{x}{-4} + \frac{y}{5} = 1 \qquad -5x + 4y = 20$$

➲ **Xüsusi hallar:**



d_1 düz xəttinin tənliyi $a_1x + b_1y + c_1 = 0$,
d_2 düz xəttinin tənliyi isə, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
d_1 düz xəttinin bucaq əmsalı m_1,
d_2 düz xəttinin bucaq əmsalı m_2-dir.

☞ Əgər $d_1 \| d_2$ olarsa,
$tg\alpha_1 = tg\alpha_2$ və $m_1 = m_2$ olar.



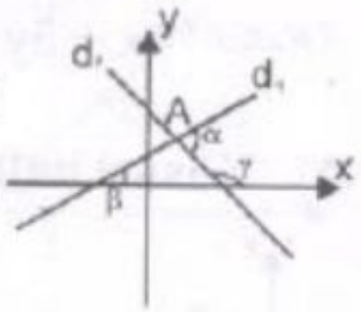
☞ $d_1 \perp d_2$ olarsa, $tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2 = -1$ və $m_1 \cdot m_2 = -1$ olar.

☞ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ olarsa, d_1 və d_2 düz xətləri üst - üstə düşür. $d_1 = d_2$

CamScanner ilə skan edilib

- $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ olarsa, $d_1 \| d_2$ olar. $m_1 = m_2$-dir.

- $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ olarsa, d_1 və d_2 yalnız bir nöqtədə kəsişirlər.



➲ **İki düz xətt arasındakı bucağın tapılması.**

ABC üçbucağının xarici bucağı θ olarsa,

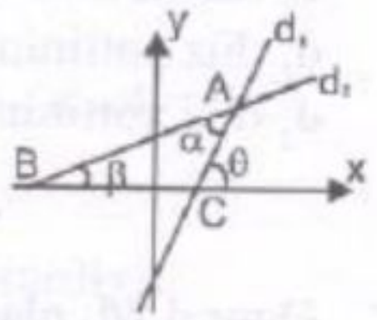
$\alpha + \beta = \theta$ $\quad tg\theta = m_1$

$\alpha = \theta - \beta$ $\quad tg\beta = m_2$

$tg\,\alpha = tg(\theta - \beta)$

$$tg\alpha = \frac{tg\theta - tg\beta}{1 + tg\theta \cdot tg\beta}$$

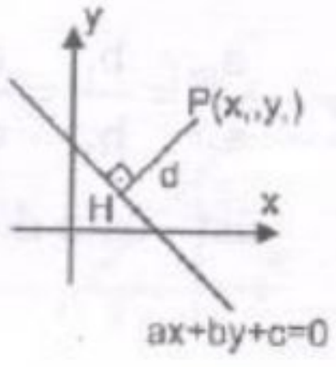
$$tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$



➲ **Verilmiş nöqtədən verilmiş düz xəttə qədər məsafə**

$P(x_1; y_1)$ nöqtəsindən $ax + by + c = 0$ düz xəttinə qədər olan məsafə d olsun. Onda,

$$|PH| = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Məsələ:

A(2; 1) nöqtəsindən $3x - 4y + 18 = 0$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

Həlli:

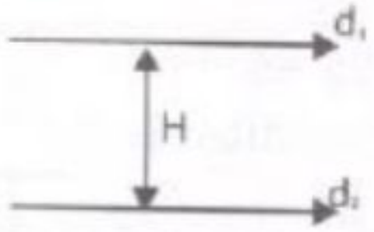
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 18|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

➲ **İki paralel düz xətt arasındakı məsafə**

d_1 düz xətti $ax + by + c_1 = 0$

d_2 düz xətti $ax + by + c_2 = 0$ olsun. Onda

$$H = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Məsələ:

$3x - 4y - 20 = 0$ və $3x - 4y - 6 = 0$ paralel düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.

Həlli:

$$H = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|20 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

➲ **Simmetriya**

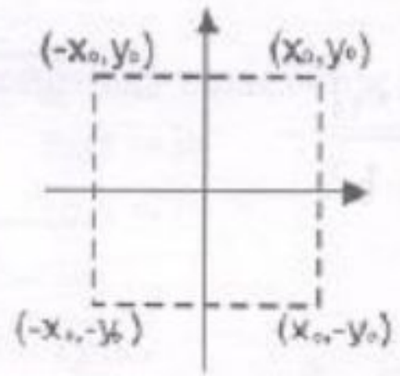
❖ $A(x_0; y_0)$ nöqtəsinə OX -oxuna görə simmetrik olan nöqtə $A_1(x_0; -y_0)$ -dür.

CamScanner ilə skan edilib

❖ $A(x_0; y_0)$ nöqtəsinə OY oxuna görə simmetrik olan nöqtə $A_2(-x_0; y_0)$ -dir.

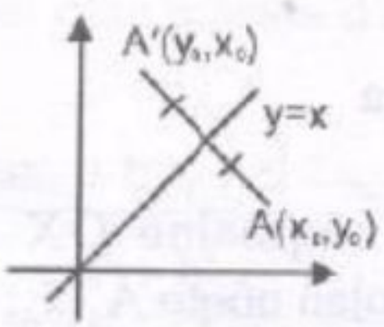
✓ A(6; 8) nöqtəsinə OY oxuna görə simmetrik olan nöqtə $A_1(-6; 8)$-dir.

❖ $A(x_0; y_0)$ nöqtəsinə (0; 0) nöqtəsinə görə simmetrik olan nöqtə $A_3(-x_0; -y_0)$ -dir.



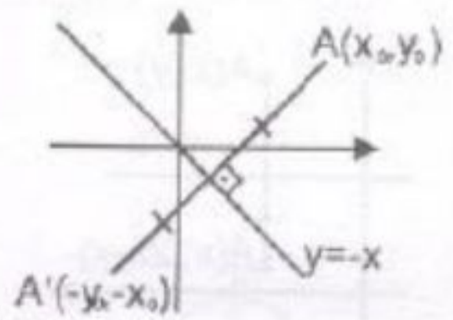
✓ A(6; 8) nöqtəsinə (0; 0) nöqtəsinə görə simmetrik olan nöqtə $A_1(-6; -8)$-dir.

❖ $A(x_0; y_0)$ nöqtəsinə y=x düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(y_0; x_0)$-dir.



✓ A(6; 8) nöqtəsinə y=x düz xəttinə görə simmetriki olan nöqtə A′(8; 6)-dır.

❖ $A(x_0; y_0)$ nöqtəsinə y=-x düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(-y_0; -x_0)$-dir.

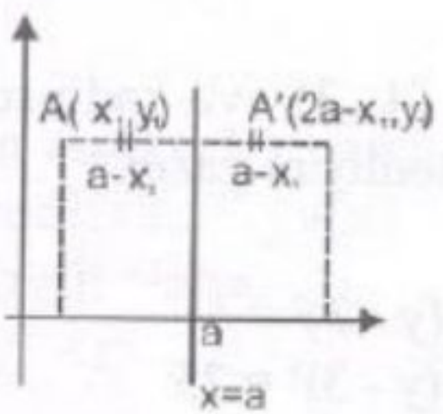


✓ A(9; 4) nöqtəsinə y=-x düz xəttinə görə simmetriki olan nöqtə A′(-4;-9) -dir.

❖ $A(x_1; y_1)$ nöqtəsinə P(a; b) nöqtəsinə görə simmetrik olan nöqtə A′(2a-x; 2b-y) -dir.

✓ A(3; 4) nöqtəsinə P(6, 9) nöqtəsinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(2 \cdot 6 - 3; 2 \cdot 9 - 4)$ $\Rightarrow A'(9; 14)$ -dir.

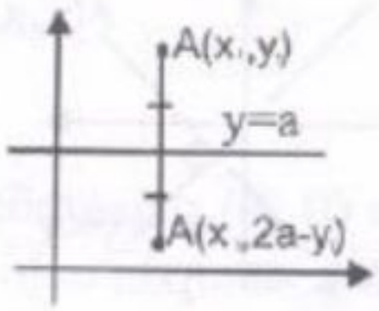
❖ $A(x_1; y_1)$ nöqtəsinə x=a düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(2a-x_1; y_1)$ -dir.



CamScanner ilə skan edilib

✓ A(8; 3) nöqtəsinə x=6 düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə A′ (2 · 6 - 8; 3) =A′ (4; 3) -dir.

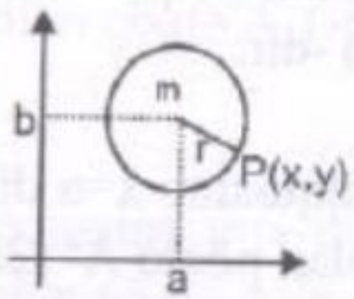
❖ $A(x_1; y_1)$ nöqtəsinə y=a düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə A′ $(x; 2a - y_1)$-dir.



✓ A(6;3) nöqtəsinə y=5 düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə A′ (6; 2 · 5 - 3) = A′ (6; 7) -dir.

Çevrənin tənliyi

1. Mərkəzi m(a; b) və radiusu r olan çevrənin tənliyi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ kimidir.



Məsələ:

Mərkəzi (4; 3) və radiusu 5 sm olan çevrənin tənliyini yazın.

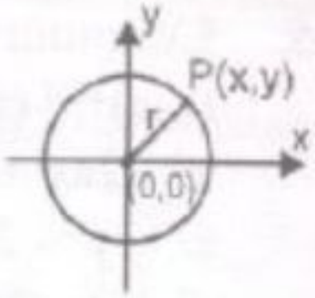
Həlli:

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

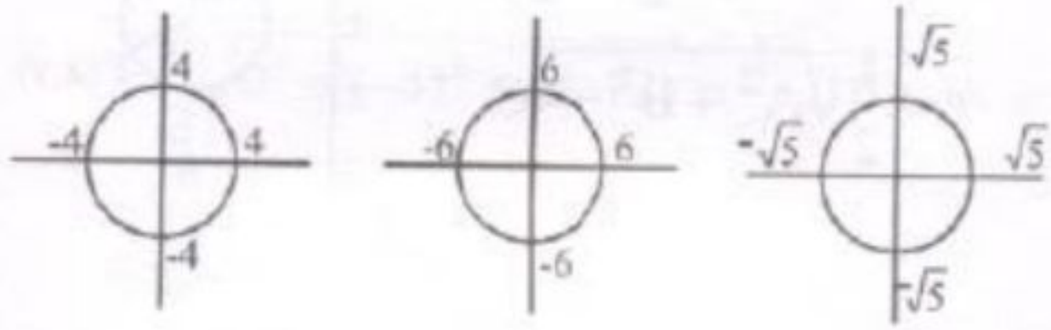
$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

2. Çevrənin mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşərsə, yə'ni m(0;0) olarsa, çevrənin tənliyi aşağıdakı kimi olar:

$x^2 + y^2 = r^2$

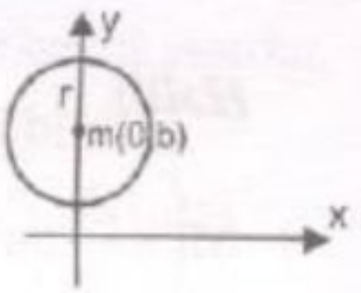


Məsələn:

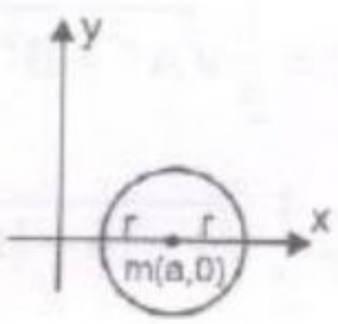


$x^2 + y^2 = 16$ $x^2 + y^2 = 36$ $x^2 + y^2 = 5$

3. Çevrənin mərkəzi y oxu üzərindədirsə, yə'ni m(0; b); (b≠0) olarsa, $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ olar



4. Çevrənin mərkəzi x oxu üzərindədirsə, yə'ni m(a; 0) (a≠0) olarsa, $(x-a)^2 + y^2 = r^2$



CamScanner ilə skan edilib

5. Çevrənin ümumi tənliyi:

$(x-a)^2 + (y-b)^2=r^2$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 = r^2$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2yb + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

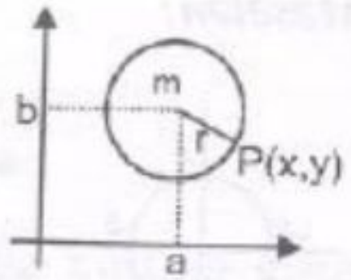
$-2a=A$, $-2b=B$ və $a^2 + b^2 - r^2 = C$ qəbul etsək,

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

m (a; b) çevrənin mərkəzidirsə,

$$m(a;b) = \left(-\frac{A}{2};-\frac{B}{2}\right)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$



Məsələ 1:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ tənliyi ilə verilən çevrənin mərkəzini və radiusunu tapın.

Həlli:

$$M\left(-\frac{A}{2};-\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{(-2)}{2};-\frac{4}{2}\right) = (1;-2)$$

M(1; -2)

A=-2, B=4, C = -4

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4\cdot 4} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3\,\text{sm}$$

Məsələ 2.

$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$ tənliyi ilə verilən çevrənin radiusunu tapın.

Həlli:

$A = 0, \quad B = -4, \quad C = -12$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-4)^2 - 4(-12)} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 48} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{64} = \frac{8}{2} = 4$$

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

- $A^2 + B^2 - 4C > 0$ olarsa, bu çevrədir.
- $A^2 + B^2 - 4C < 0$ olarsa, belə çevrə yoxdur.
- $A^2 + B^2 - 4C = 0$ isə, nöqtəni bildirir.
- $A^2 = 4C$ olarsa, çevrə x oxuna toxunur.
- $B^2 = 4C$ olarsa, çevrə y oxuna toxunur.
- $A^2 = B^2 = 4C$ olarsa, çevrə hər iki oxa toxunur.

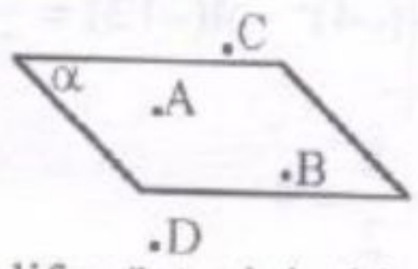
CamScanner ilə skan edilib

Fəzada düz xətlər və müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti

Stereometriya - həndəsənin fəza fiqurlarının xassələrini öyrənən bölməsidir.

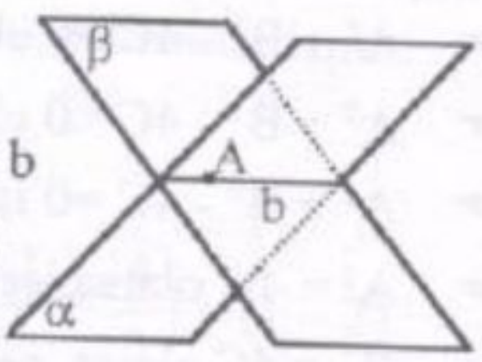
Stereometriyanın aşağıdakı aksiomları vardır:

1. İxtiyari müstəviyə aid olan nöqtələr və ona aid olmayan nöqtələr vardır (şəklə bax). Şəkildə $A\in\alpha$, $B\in\alpha$, $C\notin\alpha$, $D\notin\alpha$

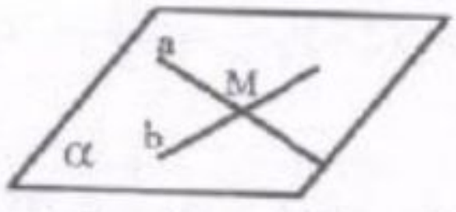


2. İki müxtəlif müstəvinin bir ortaq nöqtəsi varsa, onlar bu nöqtədən keçən düz xətt boyunca kəsişirlər. Yə'ni

$$A\in\alpha, A\in\beta \Rightarrow \begin{cases}\alpha\cap\beta=b\\ A\in b\end{cases}$$



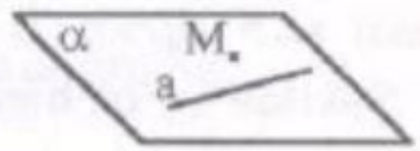
3. Kəsişən iki düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar. Yə'ni $a\cap b=M$, $a\in\alpha$, $b\in\alpha$ şərtini ödəyən α müstəvisi yeganədir.



Verilmiş aksiomların köməyi ilə aşağıdakı teoremləri isbat etmək olar.

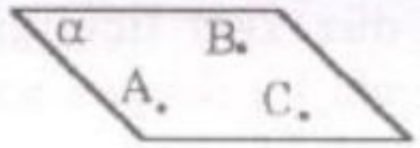
Teorem 1. Düz xətt və onun üzərində olamayan nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar. Başqa sözlə

$$M\notin\alpha \Rightarrow \begin{cases}a\subset\alpha\\ M\in\alpha\end{cases}$$



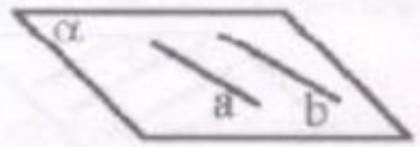
şərtini ödəyən α müstəvisi yeganədir.

Teorem 2. Bir düz xətt üzəridnə olamayan üç nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar. Yə'ni A, B, C nöqtələri üçün $A\in\alpha$, $B\in\alpha$, $C\in\alpha$ olan yeganə α müstəvisini keçirmək olar.



Teorem 3. İki paralel düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar. Yə'ni

$$a\|b \Rightarrow \begin{cases}a\subset\alpha\\ b\subset\alpha\end{cases}$$ şərtini

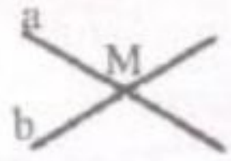


ödəyən α müstəvisi yeganədir.

Fəzadə xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti

Fəzadə düz xətlər kəsişə bilər, paralel və ya çarpaz ola bilər.

Tə'rif. *Fəzada iki düz xəttin yalnız bir ortaq nöqtəsi varsa, bu düz xətlər kəsişir.*



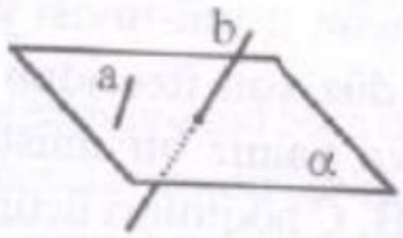
Şəkildə $a\cap b=M$ olduğundan bu düz xətlər kəsişirlər.

Tə'rif. *Bir müstəvi üzərində olub heç bir ortaq nöqtəsi olamayan və ya üst-üstə düşən düz xətlərə paralel düz xətlər deyilir. Yə'ni* $a\subset\alpha$, $b\subset\alpha$ *və* $a\cap b=\varnothing \Rightarrow a\|b$

CamScanner ilə skan edilib

Tə'rif. *Bir müstəvi üzərində yerləşməyən və ortaq nöqtələri olmayan düz xətlərə çarpaz düz xətlər deyilir. a və b düz xətlərinin çarpaz olması $a \perp b$ işarəsi ilə göstərilir.*

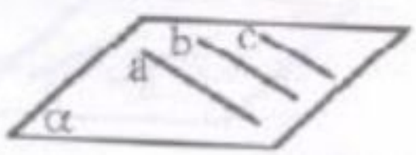
Şəkildə $a \subset \alpha$, $b \not\subset \alpha$ və $a \cap b = \varnothing \Rightarrow a \perp b$

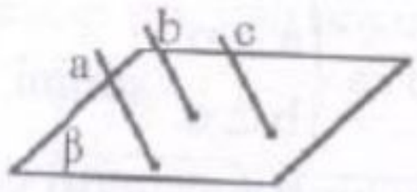


Düz xətlərin paralellik əlamətləri

Teorem. İki düz xətt üçüncü düz xəttə paraleldirsə, onda bu iki düz xətt paraleldir.

Yə'ni $\begin{cases} a \parallel \alpha \\ b \parallel \alpha \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$ olar.



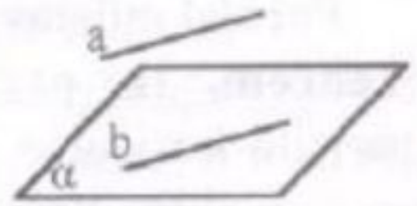


Paralel düx xətlər və müstəvilər

Tə'rif. *Düz xətt və müstəvinin ortaq nöqtəsi yoxdursa, onda düz xətt müstəviyə paraleldir. a düz xəttinin α müstəvisinə paralelliyi belə yazılır.* $a \parallel \alpha$

Teorem. (Düz xətt və müstəvinin paralellik əlaməti). Düz xətt müstəvi üzərindəki hər hansı düx xəttə paraleldirsə, onda həmin düz xətt müstəviyə də paraleldir. Teoremi qısaca olaraq belə yazmaq olar:

$\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow a \parallel \alpha$



Bu teoremin tərsi də doğrudur.

Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti

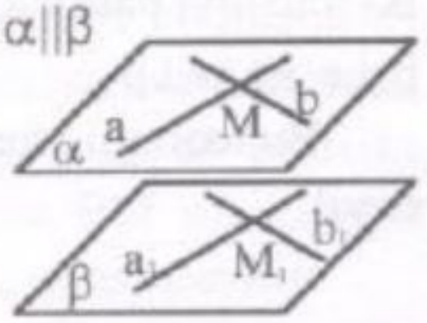
İki müstəvi aşağıdakı qarşılıqlı vəziyyətlərdə ola bilər:

1. İki müstəvinin bir ortaq nöqtəsi var. Belə müstəvilər həmin nöqtədən keçən düz xətt boyunca kəsişirlər.
2. İki müstəvinin heç bir ortaq nöqtəsi yoxdur.
3. İki müstəvinin bir düz xətt üzərində olmayan üç ortaq nöqtəsi var. Belə müstəvilər üst-üstə düşür.

Tə'rif. *Ortaq nöqtəsi olmayan və ya üst-üstə düşən müstəvilərə paralel müstəvilər deyilir. α və β müstəvilərinin paralelliyi $\alpha \parallel \beta$ kimi işarə olunur.*

Teorem. (İki müstəvinin paralellik əlaməti). Bir müstəvinin iki kəsişən düz xətti uyğun olaraq, o biri müstəvinin iki kəsişən düz xəttinə paraleldirsə, onda həmin müstəvilər paraleldir.

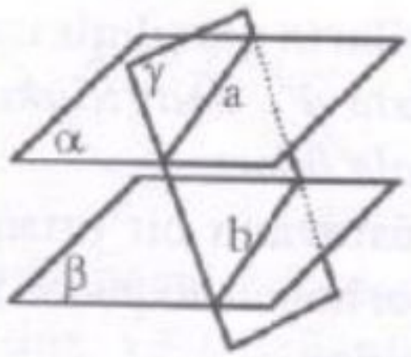
$\begin{cases} a, b \subset \alpha \text{ və } a \cap b = M \\ a \parallel a_1, b \parallel b_1 \text{ və } a_1, b_1 \in \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$



CamScanner ilə skan edilib

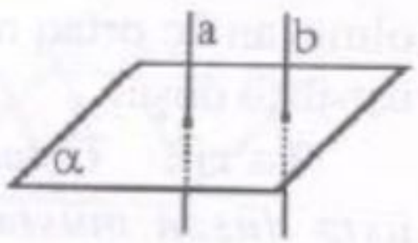
Paralel müstəvilərin xassələri

Teorem. İki paralel müstəvi üçüncü müstəvi ilə kəsişərsə, onda onların kəsişmə xətləri paraleldir. Yə'ni $\alpha \| \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$ $\Rightarrow a \| b$



Teorem. Verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə yalnız bir paralel müstəvi keçirmək olar. Yə'ni $M \notin \alpha$, $M \in \beta \Rightarrow \beta \| \alpha$ şərtini ödəyən β müstəvisi yeganədir.

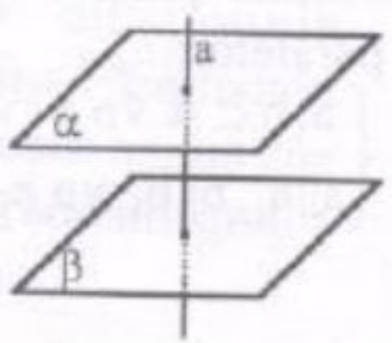
Teorem. Əgər iki düz xətt eyni müstəviyə perpendikul-yardırsa, onda həmin düz xətlər paraleldir. Yə'ni $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha \Rightarrow a \| b$



Tərs teorem. Paralel düx xətlərdən birinə perpendikulyar olan müstəvi digər düz xəttə də perpendikulyardır. Yəni $a \| b$, $a \perp \alpha \Rightarrow \alpha \perp b$

Teorem. Eyni düz xəttə perpendikulyar olan iki müstəvi paraleldir. $\alpha \perp a$, $\beta \perp a \Rightarrow \alpha \perp \beta$

Bu teoremin tərsi doğru deyil.

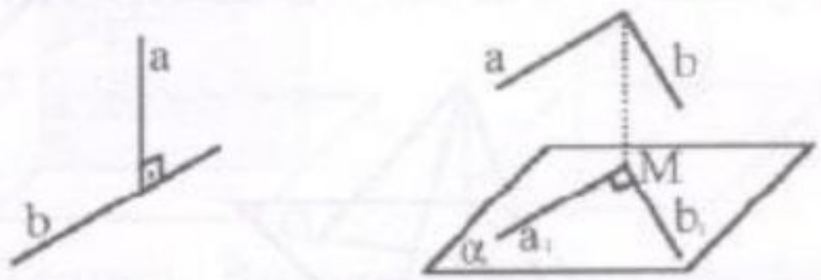


Fəzadə düz xətlərin perpendikulyarlığı

Tə'rif. *Fəzada düz bucaq altında kəsişən iki düz xəttə perpendikulyar düz xətlər deyilir.* Müstəvi üzərində olduğu kimi a və b düz xətlərinin perpendikulyarlığı $a \perp b$ kimi işarə olunur.

Teorem. Kəsişən iki düz xətt uyğun olaraq perpendikulyar iki düz xəttə paralel olarsa, onda onlar perpendikulyardırlar. Yə'ni

$$\begin{cases} a_1 \perp b_1 \text{ və } a_1 \cap b_1 = M \\ a \| a_1,\ b \| b_1 \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$

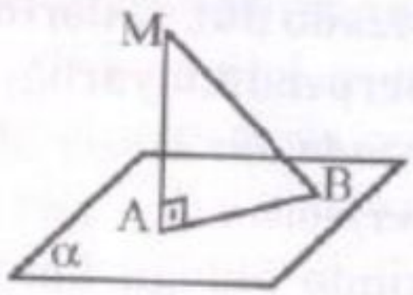


Perpendikulyar və maillər

Tə'rif. *Müstəvi xaricində götürülmüş nöqtədən bu müstəviyə çəkilmiş perpendikulyarın müstəviyə qədər olan parçasına verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə çəkilmiş perpendikulyar deyilir.*

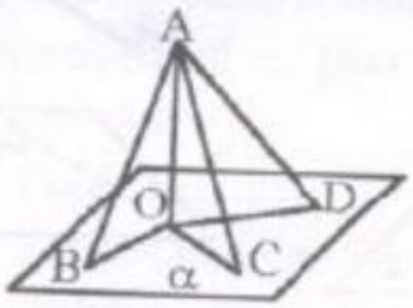
Tə'rif. *Müstəvini kəsən, lakin ona perpendikulyar olmayan düz xəttə mail deyilir.* α müstəvisi üzərində olmayan M nöqtəsindən bu müstəviyə MA perpendikulyarı və MB maili çəkilərsə, A perpendikulyarın, B maililn oturacağı olur. AB parçasına BM mailinin α müstəvisi üzərindəki proyeksiyası deyilir.

CamScanner ilə skan edilib



Teorem. Müstəvi xaricindəki nöqtədən müstəviyə perpendikulyar və maillər çəkilərsə;

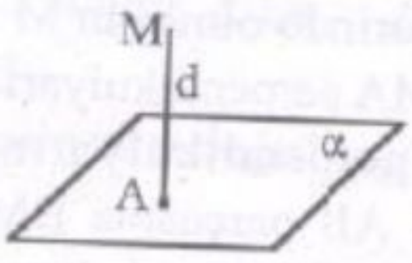
1. perpendikulyar ixtiyari maildən qısadır. Yə'ni AO<AB, AO<AC, AO<AD,
2. proyeksiyaları bərabər olan maillər bərabərdir. Yə'ni OB=OC ⇒ AB=AC
3. iki maildən proyeksiyası böyük olan mail böyükdür. Yə'ni OD>OB ⇒ AD>AB



Nöqtədən müstəviyə qədər məsafə

Tə'rif. Verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə qədər çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna nöqtədən müstəviyə qədər olan məsafə deyilir.

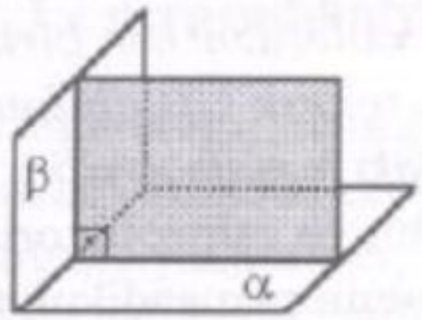
Şəkildə AM=d, M nöqtəsindən α müstəvisinə qədər olan məsafədir.

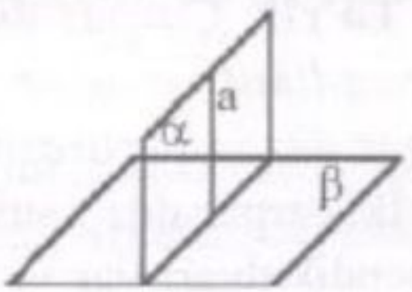


Perpendikulyar müstəvilər.
İki müstəvinin perpendikulyarlıq əlaməti

Tə'rif. İki kəsişən müstəvinin kəsişmə xəttinə perpendikulyar olan üçüncü müstəvi onları perpendikulyar düz xətlər üzrə kəsərsə, onda kəsişən müstəvilərə perpendikulyar müstəvilər deyilir.

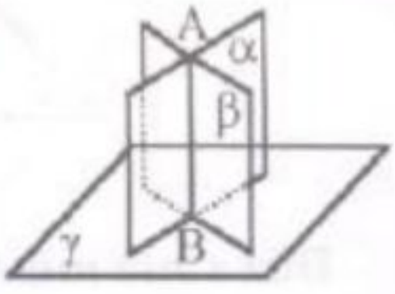
Teorem. (İki müstəvinin perpendikulyarlıq əlaməti). Müstəviyə perpendikulyar düz xətdən keçən müstəvi, həmin müstəviyə də perpendikulyardır. Yə'ni $a \perp \beta$, $a \subset \alpha \Rightarrow \alpha \perp \beta$

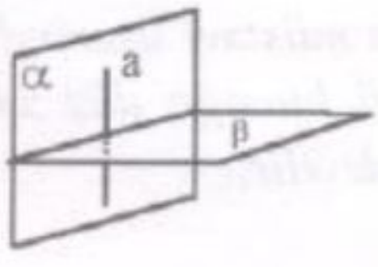


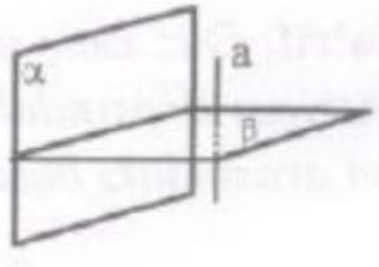


Teorem. Bir müstəviyə perpendikulyar olan iki müstəvinin kəsişmə xətti həmin müstəviyə perpendikulyardır. Yə'ni $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, $\alpha \cap \beta \Rightarrow AB \perp \gamma$

Teorem. İki perpendikulyar müstəvidən birinə perpendikulyar olan düz xətt ya o biri müstəvi üzərindədir, ya ona paraleldir. Yə'ni $\alpha \perp \beta$, $a \perp \beta \Rightarrow a \subset \alpha$ və ya $a \parallel \alpha$



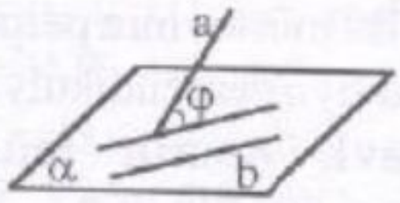




CamScanner ilə skan edilib

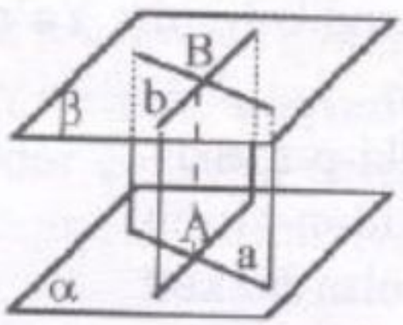
Çarpaz düz xətlər arasındakı bucaq və məsafə

Tə'rif. *Çarpaz düz xətlərə paralel olmaqla bir nöqtədən çıxan iki şüanın əmələ gətirdiyi eyniadlı bucağa, çarpaz düz xətlər arasındakı bucaq deyilir.*



Tə'rif. *Çarpaz düz xətlərdən hər birinə perpendikulyar olan parçanın uzunluğuna çarpaz düz xətlər arasındakı məsafə deyilir.*

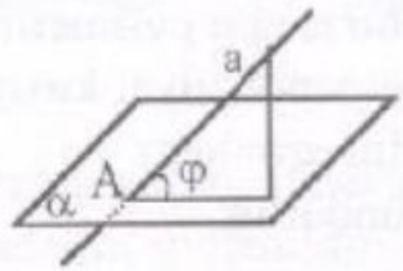
İki çarpaz düz xəttin bir və yalnız bir ortaq perpendikulyarı var və həmin perpendikulyar, bu düz xətlərdən keçən paralel müstəvilərin ortaq perpendikulyarıdır.



Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq

Tə'rif. *Düz xətlə onun müstəvi üzərindəki proyeksiyası arasındakı iti bucağa düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq deyilir.*

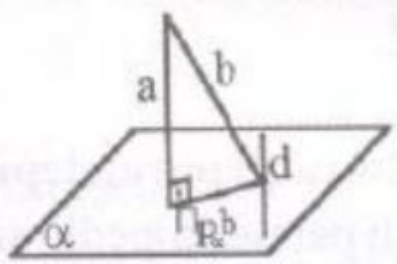
Şəkildə a düz xətti α müstəvisini A nöqtəsində kəsir. Bu düz xətlə onun həmin müstəvi üzərindəki proyeksiyası arasındakı φ bucağına a düz xətti ilə α müstəvisi arasındakı bucaq deyilir. və φ=(a^α) kimi göstərilir.



Üç perpendikulyar haqqında teorem.

Teorem. Müstəvi üzərində mailin oturacağından keçirilmiş düz xətt, onun proyeksiyasına perpendikulyardırsa, onda o mailə perpendikyardır.

Tərs teorem. Müstəvi üzərindəki düz xətt mailə perpendikulyardırsa, onda o mailin proyeksiyasına da perpendikulyardır.



CamScanner ilə skan edilib

Çoxüzlülər

V – həcm
S_{tam} – tam səthin sahəsi
S_{yan} – yan səthin sahəsi
S_{ot} – oturacağın sahəsi
P_{ot} – oturacağın perimetri
$P_{p.k.}$ – perpendikulyar kəsiyin perimetri
ℓ – tilin uzunluğu
H – hündürlük

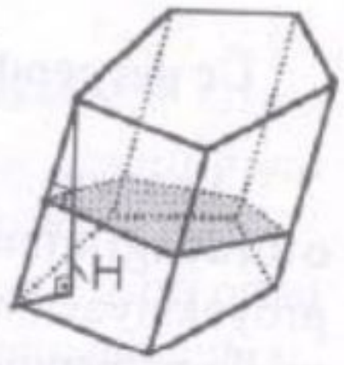
Mail prizma

Prizmanın səthinin sahəsi:

1. $S_{yan} = P_{p.k.} \cdot \ell$
2. $S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan.}$

Prizmanın həcmi:

3. $V = S_{ot.} \cdot H = S_{p.k.} \cdot \ell$



Düz prizma

Düz prizmanın səthinin sahəsi:

1. $S_{yan} = P_{ot} \cdot \ell \quad (\ell = H)$
2. $S_{tam} = P_{ot} \cdot \ell + 2S_{ot}$

Düz prizmanın həcmi:

3. $V = S_{ot} \cdot \ell$

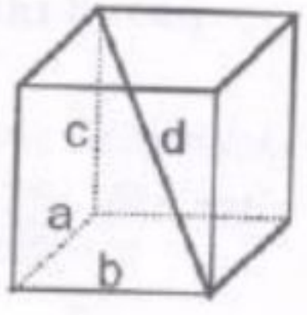
Düzbucaqlı paralelepiped

Düzbucaqlı paralelepipedin səthinin sahəsi:

1. $S_{yan} = 2c(a+b)$

Burada a və b -oturacağın tərəfləri, c -isə tildir.

2. $S_{tam} = 2(ab + bc + ac)$
3. $V = abc$



Düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalı

4. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

burada d - diaqonaldır.

Piramida

Düzgün piramidanın səthinin sahəsi:

1. $S_{yan.} = ph$

burada,

p - oturacağın yarımperimetri
h - piramidanın apofemidir.

2. $S_{tam} = S_{yan} + S_{ot.}$

Piramidanın həcmi:

3. $V = \frac{1}{3} S_{ot.} \cdot H$

Kəsik piramida

Düzgün kəsik piramidanın səthinin sahəsi:

1. $S_{yan} = (p_1 + p_2) \cdot h$

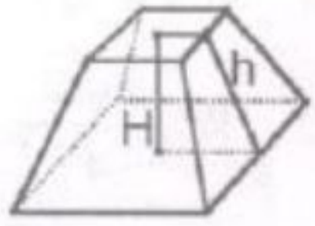
burada,

p_1 və p_2 -oturacaqların yarımperimetrləri
h - kəsik piramidanın apofemidir.

2. $S_{tam} = S_{yan} + S_1 + S_2$

burada,

S_1 və S_2 - oturacaqların sahələridir.



Kəsik piramidanın həcmi:

3. $V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right) \cdot H$

H - kəsik piramidanın hündürlüyüdür.

CamScanner ilə skan edilib

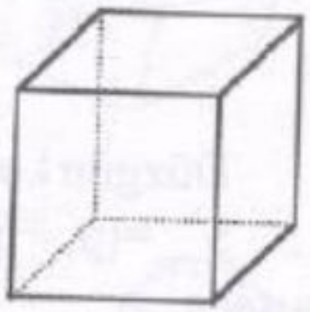
Düzgün çoxüzlülər

Çoxüzlünün növü	Üzlərin sayı və forması	Tillərin sayı	Təpə nöqtələrin sayı	Bir nöqtədən çıxan til.say.
Tetraedr	4 üzbucaq	6	4	3
Kub	6 kvadrat	12	8	3
Oktaedr	8 üçbucaq	12	6	4
Dodekaedr	12 beşbucaqlı	30	20	3
İkosaedr	20 üçbucaq	30	12	5

e - təpə nöqtələrinin sayı, f - üzlərin sayı, k - tillərin sayı olarsa, Eyler teoreminə əsasən e - k + f = 2 olar.

Aşağıdakı düsturlarda a - tillərin uzunluğu, S - səthin sahəsi, V - həcm, R - xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu, r - daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

Kub

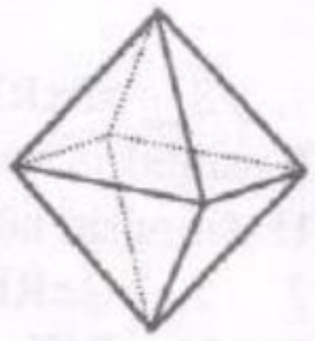


1. $S = 6a^2;\ H = a$
2. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ r = \frac{a}{2}$
3. $V = a^3$

Tetraedr

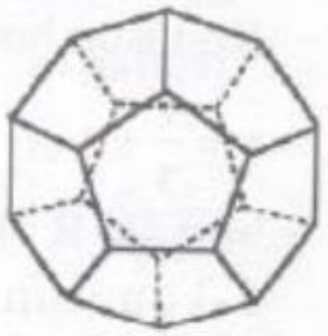
1. $S = a^2\sqrt{3}$
2. $R = \frac{a\sqrt{6}}{4};\ r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$
3. $R = 3r;\ H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
4. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Oktaedr



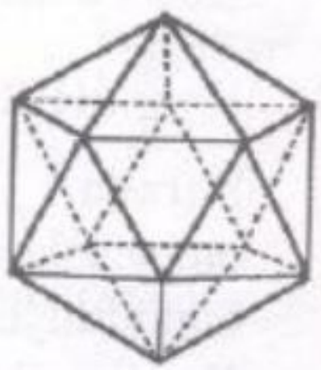
1. $S = 2a^2\sqrt{3}$
2. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ r = \frac{a\sqrt{6}}{6};\ R = 3r$
3. $V = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

Dodekaedr



1. $S = 3\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\cdot a^2$
2. $R = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}\cdot a$
3. $r = \frac{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}\cdot a$
4. $V = \frac{\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}\cdot a^3$

İkosaedr

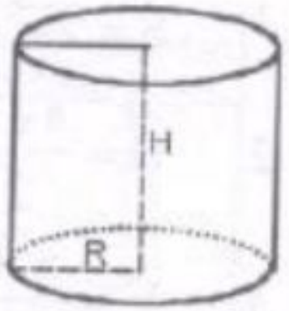


1. $S = 5\sqrt{3}\cdot a^2$
2. $R = \frac{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}\cdot a$
3. $r = \frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}\cdot a$
4. $V = \frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}\cdot a^3$

CamScanner ilə skan edilib

Fırlanma cisimləri

Silindr



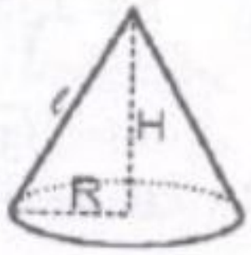
1. $S_{yan}=2\pi RH$

R- silindrin oturacağını radiusu

H -silindrin hündürlüyü

2. $S_{tam}=2\pi RH+2\pi R^2=2\pi R(H+R)$
3. $V=\pi R^2H$
4. Silindrin diaqonal kəsiyi düzbucaqlıdır.

Konus



1. $S_{yan}=\pi R\ell$
2. $S_{tam}=\pi R(R+\ell)$

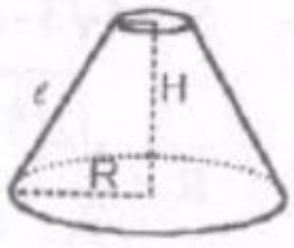
Konusun həcmi:

3. $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$

burada, R -konusun oturacağının radiusu, ℓ-konusun doğuranı, H -konusun hündürlüyüdür. Konusun diaqonal kəsiyi bərabəryanlı üçbucaqdır.

Kəsik konus

Kəsik konusun səthinin sahəsi:



1. $S_{yan}=\pi\ell(R+r)$
2. $S_{tam}=\pi\ell(R+r)+\pi(R^2+r^2)$

Kəsik konusun həcmi:

3. $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$

burada, R və r-kəsik konusun oturacaqlarının radiusları, H -kəsik konusun hündürlüyü, ℓ-kəsik konusun doğuranıdır. Kəsik konusun qiaqonal kəsiyi bərabəryanlı trapesiyadır.

Sfera, kürə və onun hissələri

Sferanın sahəsi:

1. $S=4\pi R^2$

Kürənin həcmi:

2. $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

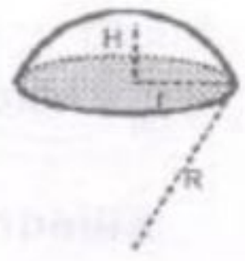
Kürə sektorunun səthinin sahəsi:

1. $S=\pi R(2H+r)$

Kürə sektorunun həcmi:

2. $V=\frac{2\pi R^2H}{3}$

Kürə seqmentinin səthinin sahəsi:



1. $S_{yan}=2\pi RH=\pi(r^2+H^2)$
2. $S_{tam}=\pi(2RH+r^2)=\pi(H^2+2r^2)$

Kürə seqmentinin həcmi:

3. $V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$

Kürə qatının (qurşağın) səthinin sahəsi:

1. $S_{yan}=2\pi Rh$
2. $S_{tam}=2\pi Rh+\pi(r_1^2+r_2^2)$

Kürə qatının həcmi:

3. $V=\frac{1}{6}\pi h(3r_1^2+3r_2^2+h^2)$

burada,

R - kürənin radiusu

H - seqmentin hündürlüyü

h - kürə qatının hündürlüyü

r_1 və r_2 - kürə qatının oturacaqlarının radiusları

r - seqmentin oturacağının radiusudur.

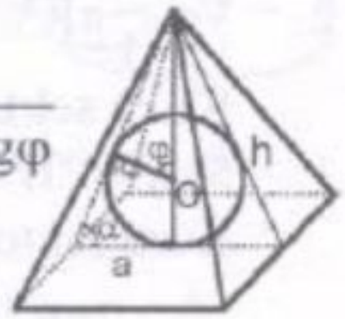
CamScanner ilə skan edilib

Daxilə və xaricə çəkilmiş fiqurlar

Düzgün piramidanın daxilinə çəkilmiş kürə

1. $R_{kür} = \dfrac{a \cdot H}{2h + a}$

$$\frac{a}{2R_{kür}} = \frac{h}{H - R_{kür}} = \frac{H}{R_{kür} \cdot tg\varphi}$$



burada,

h - piramidanın apofemi

H - piramidanın hündürlüyü

a - oturacağın tərəfi

φ - yan üzlə oturacaq müstəvisi arasındakı bucaq

$R_{kür}$ - kürənin radiusudur

Silindr daxilinə çəkilmiş konus

1. $H_{sil.} = H_{kon.} = H;\ R_{s.l.} = R_{kon.} = R;$

$$\frac{S_{y.sl.}}{S_{y.kon.}} = \frac{2H_{sl.}}{\ell} = \frac{2H_{kon.}}{\ell};$$

$V_{Sl.} = 3V_{kon.}$

burada, S_{yan} və S_{kon} - silindrin və konusun yan səthinin sahəsi, $R_{sl.}$ və R_{kon} - silindrin və konusun oturacaqlarının radiusu, ℓ - konusun doğuranı, $V_{sl.}$ və V_{kon} - silindrin və konusun həcmi, H_{sl} və H_{kon} - silindrin və konusun hündürlüyüdür.

Silindr daxilinə çəkilmiş kürə

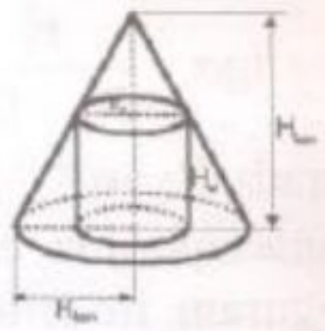
1. $R_{sl.} = R_{kür} = R$
2. $H = 2R$
3. $V_{sl.} = 1{,}5V_{kür}$
4. $S_{y.sl.} = S_{sfera}$

burada, S_{sfera} -sferanın sahəsi, $R_{kür}$ -kürənin radiusu, $V_{kür}$ -kürənin həcmidir.

Konus daxilinə çəkilmiş silindr

1. $\dfrac{R_{kon.}}{R_{sl.}} = \dfrac{H_{kon.}}{H_{kon.} - H_{sl.}};$

$$\frac{H_{kon.}}{H_{sl.}} = \frac{R_{kon.}}{R_{kon.} - R_{sl.}}$$



2. $$\frac{H_{kon.}}{H_{sl.}} = \frac{\ell}{\ell - \sqrt{R_{sl.}^2 + (H_{kon.} - H_{sl})^2}}$$

Konus daxilinə çəkilmiş kürə

1. $R_{kür} = \dfrac{R_{kon.} \cdot H_{kon}}{\ell + R_{kon.}}$

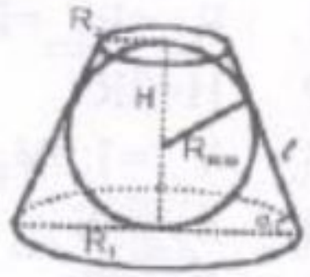
$$\frac{\ell}{H_{kon.} - R_{kür.}} = \frac{R_{kon.}}{R_{kür.}}$$

$$R_{kon} = \sqrt{\ell^2 - H_{kon}^2}$$

CamScanner ilə skan edilib

Kəsik konus daxilinə çəkilmiş kürə

1. $\ell = R_1 + R_2$



$$H = 2\sqrt{R_1 R_2} = 2R_{kür}$$

$$R^2_{kür} = R_1 \cdot R_2$$

$$\sin\alpha = \frac{H}{\ell} = \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} = \frac{2R_{kür}}{\ell}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 - R_2}{\ell}$$

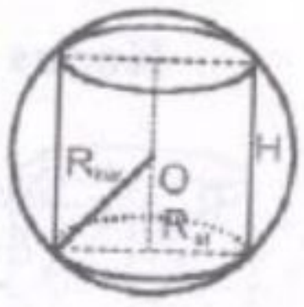
$$tg\alpha = \frac{H}{R_1 - R_2} = \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 - R_2} = \frac{2R_{kür}}{R_1 - R_2}$$

burada, R_1 və R_2 -kəsik konusun aşağı və yuxarı oturacaqlarının radiusları, α - kəsik konusun doğuranı ilə oturacaq müstəvisi arasındakı bucaqdır.

Kürə daxilinə çəkilmiş silindr

1. $H_{sil.} = 2\sqrt{R^2_{kür} - R^2_{sil.}}$

2. $R_{sil.} = \sqrt{R^2_{kür} - \frac{H^2_{sil}}{4}}$



Kürə daxilinə çəkilmiş konus

1. $R_{kür} = \frac{\ell^2}{2H_{kon}}$

2. $R^2_{kon} = H_{kon} \cdot (2R_{kür} - H_{kon})$

Mündəricat

1. Bucaqlar 3
2. Üçbucaqlar 9
3. Bərabəryanlı üçbucaq 12
4. Pifaqor teoremi 15
5. Bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaq 16
6. Bərabərtərəfli üçbucaq 19
7. Tənbölən 24
8. Üçbucağın mediani 26
9. Üçbucaqda sahə 33
10. Üçbucaqların bərabərliyi 41
11. Üçbucaqların oxşarlığı 42
12. Çoxbucaqlılar 45
13. Dördbucaqlı 48
14. Paraleloqramlar 49
15. Düzbucaqlı 55
16. Romb 57
17. Kvadrat 61
18 Trapesiya 62
19. Çevrə 66
20. Çevrədə bucaqlar 69
21. Dairənin sahəsi 70
22. Vektorlar 73
23. Fəzada vektorlar 79
24. Koordinatlar metodu 83
25. Düz xətt tənlikləri 88
26. Simmetriya 93
27. Çevrənin tənliyi 96
28. Fəzada düz xətlər və müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti 100

CamScanner ilə skan edilib

29. Çoxüzlülər 110
30. Düzgün çoxüzlülər..... 112
31. Fırlanma cisimləri 114
32. Silindir 114
33. Konus 114
34. Kəsik konus 114
35. Sfera, kürə və onun hissələri 115

CamScanner ilə skan edilib

CamScanner ilə skan edilib